

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина

*О. Б. Гладких,
О. Н. Прокуратова*

Введение в численные методы

Учебно-методическое пособие

Елец-2008

УДК 519.6(075.8)

Рецензенты:

В. Е. Щербатых, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и элементарной математики (Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина).

Н. Г. Подаева, доктор педагогических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии (Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина).

О. Б. Гладких, О. Н. Прокуратова

Введение в численные методы: Учебно-методическое пособие. – Елец: Изд. ЕГУ им. И.А. Бунина, 2008. – 140 с.

В пособии в краткой форме изложены наиболее известные и широко применяемые численные методы. Каждая тема содержит теоретические сведения, для наглядности иллюстрируемые графически, даны примеры решения типовых задач. Пособие составлено с учётом требований государственного образовательного стандарта, в нём на доступном уровне изложены основополагающие вопросы, входящие в учебную программу по дисциплине «Численные методы».

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов физико-математического, инженерно-физического факультетов университета.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
Тема 1. Особенности решения задач численными методами. Основные понятия	7
1.1. Погрешность	7
1.2. Корректность	9
1.3. Численные методы	10
Тема 2. Решение нелинейных уравнений	13
2.1. Постановка задачи	13
2.2. Основные этапы отыскания решения	14
2.3. Метод половинного деления (метод дихотомии, метод проб, метод бисекции)	15
2.4. Метод простых итераций	18
2.5. Метод Ньютона (метод касательных)	24
2.6. Метод секущих (метод хорд)	29
2.7. Метод ложного положения	32
Тема 3. Решение систем линейных алгебраических уравнений	35
3.1. Постановка задачи	35
3.2. Метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса). Схема единственного деления	37
3.3. Метод исключения Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.....	42
3.4. Вычисление определителя методом исключения Гаусса	45
3.5. Вычисление обратной матрицы методом исключения Гаусса	47
3.6. Метод простой итерации Якоби	50
3.7. Метод Зейделя	58
Тема 4. Приближение и интерполяция функций	62
4.1. Постановка задачи	62

4.2. Приближение функции многочленами Тейлора	63
4.3. Интерполяция функции многочленами Лагранжа	66
4.4. Интерполяционные многочлены Ньютона для равноотстоящих узлов	73
4.5. Аппроксимация функций. Метод наименьших квадратов	78
Тема 5. Численное интегрирование функций одной переменной	87
5.1. Постановка задачи численного интегрирования	87
5.2. Метод средних прямоугольников	88
5.3. Метод трапеций	93
5.4. Метод Симпсона (метод парабол)	96
5.5. Правило Рунге практической оценки погрешности	99
Тема 6. Численное решение дифференциальных уравнений	101
6.1. Постановка задачи Коши	101
6.2. Метод Эйлера	104
6.3. Модифицированные методы Эйлера	109
6.4. Метод Рунге – Кутты	114
Типовые контрольные работы	118
Тестовые задания по рассмотренным численным методам	122
Ключи верных ответов	133
Список вопросов для самостоятельного изучения	137
Список основной и дополнительной литературы	139

- Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972.
- Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. – Томск: МП «РАСКО», 1991.
- Мухачёва Э. А., Рубинштейн Г. Ш. Математическое программирование. – Новосибирск: Наука, 1987.
- Пирумов У.Г. Численные методы: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1998.
- Практикум по численным методам. / Л.Я. Егорова, Л.Л. Левин, Б.Г. Ослин и др. – Томск: Изд. ТГУ, 1979.
- Рашиков В. И., Рошаль А. С. Численные методы решения физических задач.– СПб.: Изд-во «Лань».2005.
- Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1987г.
- Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1989.
- Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука. 1978.
- Сухарев А. Г., Тихонов А. В., Федоров В. В. Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986.
- Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986.
- Турчак Л.И. Основы численных методов. М.:Наука, 1987г.
- Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P., Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing. 2-nd ed. – Copyright © Cambridge University Press, 1992.

Список основной и дополнительной литературы

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1994.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.– М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003.
3. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981.
4. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач.– М.: Наука, 1981.
5. Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю. Линейное программирование. – М: Факториал, 1998.
6. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 1987.
7. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по численным методам. – М.: Высшая школа, 1991.
8. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970.
9. Дьяконов В. П. Математическая система Maple V R3/R4/R5. – М.: Изд-во «СОЛОН», 1998.
10. Заварыкин В.М. и др. Вычислительная математика. Учебное пособие. – Свердловск, 1985г.
11. Заварыкин В.М., Житомирский В. Г., Лапчик М. П. Численные методы.– М.: Просвещение, 1991.
12. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978.
13. Карманов В. Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1986.
14. Кацман Ю.Я. Прикладная математика. Численные методы. Учебное пособие. – Томск: Изд. ТПУ, 2000.
15. Копченова Н.В., Марон И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972.

Введение

Исследование различных явлений или процессов математическими методами осуществляется с помощью *математической модели*. Математическая модель представляет собой формализованное описание на языке математики исследуемого объекта. Таким формализованным описанием может быть система линейных, нелинейных или дифференциальных уравнений, система неравенств, определенный интеграл, многочлен с неизвестными коэффициентами и т. д. Математическая модель должна охватывать важнейшие характеристики исследуемого объекта и отражать связи между ними.

После того, как математическая модель составлена, переходят к *постановке вычислительной задачи*. При этом устанавливают, какие характеристики математической модели являются *исходными (входными) данными*, какие – *параметрами модели*, а какие – *выходными данными*. Проводится анализ полученной задачи с точки зрения существования и единственности решения.

На следующем этапе выбирается *метод* решения задачи. Во многих конкретных случаях найти решение задачи в явном виде не представляется возможным, так как оно не выражается через элементарные функции. Такие задачи можно ре-

шить лишь приближенно. Под *вычислительными (численными) методами* подразумеваются приближенные процедуры, позволяющие получать решение в виде конкретных числовых значений. Вычислительные методы, как правило, реализуются на ЭВМ. Для решения одной и той же задачи могут быть использованы различные вычислительные методы, поэтому нужно уметь оценивать качество различных методов и эффективность их применения для данной задачи.

Затем для реализации выбранного вычислительного метода составляется *алгоритм и программа для ЭВМ*. Современному инженеру важно уметь преобразовать задачу к виду, удобному для реализации на ЭВМ и построить алгоритм решения такой задачи.

В настоящее время на рынке программного обеспечения широко представлены как пакеты, реализующие наиболее общие методы решения широкого круга задач (например, Maple, Mathcad, MatLAB), так и пакеты, реализующие методы решения специальных задач.

Результаты расчета анализируются и интерпретируются. При необходимости корректируются параметры метода, а иногда математическая модель, и начинается новый цикл решения задачи.

16. Проблема собственных значений.
17. Степенной метод отыскания двух наибольших по модулю собственных значений и отвечающих им собственных векторов.
18. Метод обратных итераций.
19. Понятие о QR-алгоритме.
20. Разностные уравнения первого порядка с переменными коэффициентами.
21. Разностные уравнения произвольного порядка с постоянными коэффициентами и специальными правыми частями.
22. Задача на собственные значения для оператора второй разности с граничными условиями первого рода.

Список вопросов для самостоятельной работы

1. Треугольное разложение матрицы.
2. Теорема существования и единственности треугольного разложения.
3. Ленточные матрицы.
4. Ленточный вариант треугольного разложения и трудоемкость его реализации.
5. Треугольное разложение трехдиагональных матриц и метод прогонки.
6. Метод Холецкого для положительно определенных матриц: алгоритм, теорема существования и единственности трудоемкость.
7. Ленточный вариант метода Холецкого.
8. Метод блочного исключения (метод частичного исключения неизвестных).
9. Обращение матриц.
10. Устойчивость вычислительных алгоритмов линейной алгебры.
11. Метод Гаусса с выбором главного элемента. Методы вращений и отражений.
12. Одношаговые итерационные методы; неявный метод простых итераций.
13. Чебышевский итерационный метод.
14. Итерационные методы вариационного типа: метод скорейшего спуска, метод сопряженных градиентов.
15. Оценки скорости сходимости.

Тема 1. Решение задач численными методами.

Основные понятия

1.1. Погрешность

Численное решение любой задачи обычно осуществляется приближенно, с различной точностью.

Главная задача численных методов – фактическое нахождение решения с требуемой или, по крайней мере, оцениваемой точностью.

Отклонение истинного решения от приближенного называется погрешностью. Полная погрешность вычислений состоит из двух составляющих:

- 1) неустранимая погрешность;
- 2) устранимая погрешность.

Неустранимая погрешность обусловлена неточностью исходных данных и никаким образом не может быть уменьшена в процессе вычислений.

Устранимая погрешность состоит из двух составляющих:

- а) погрешность аппроксимации (метода);
- б) погрешность вычислений.

Эти составляющие могут быть уменьшены выбором более точных методов и увеличением разрядности вычислений.

Существуют четыре источника погрешностей, возникающих в результате численного решения задачи:

1. *Математическая модель.* Погрешность математической модели связана с ее приближенным описанием реального объекта. Погрешность математической модели является неустранимой, в дальнейшем предполагается, что математическая модель фиксирована и ее погрешность учитываться не будет.

2. *Исходные данные.* Исходные данные обычно содержат погрешности, так как они либо неточно измерены, либо являются результатом решения некоторых вспомогательных задач. Во многих физических и технических задачах погрешность измерений составляет 1 – 10%. Погрешность исходных данных считается неустранимой и учитываться не будет.

3. *Метод вычислений.* Применяемые для решения задачи методы, как правило, являются приближенными. Погрешность метода необходимо определять для конкретного метода. Обычно ее можно оценить и проконтролировать. Следует выбирать погрешность метода так, чтобы она была не более чем на порядок меньше неустранимой погрешности.

4. *Округление в вычислениях.* Погрешность округления возникает из-за того, что вычисления производятся с конечным числом значащих цифр. Округление производят по следующему правилу: если в старшем из отбрасываемых разрядов стоит

$$M_3 = \max |f^{(4)}(x)|, \quad [a, b].$$

(формула Симпсона).

Вариант №3
B5

Первая формула:

$$P_n(x) = y_0 + T \cdot \Delta y_0 + \frac{T(T-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{T(T-1)^n \cdot \dots \cdot (T-n+1)}{n!} \Delta^n y_0,$$

где $T = \frac{x - x_0}{h}$; $h = x_{i+1} - x_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$;

$\Delta^1 y_0$ – конечная разность I-го порядка, причем $\Delta^1 y_0 = \Delta^{1-1} y_1 - \Delta^{1-1} y_0$. ($i = 1, 2, \dots, n$).

Вторая формула:

$$P_n(x) = y_n + T \cdot \Delta y_{n-1} + \frac{T(T+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{T(T+1) \cdot \dots \cdot (T+n-1)}{n!} \Delta^n y_0,$$

где $T = \frac{x - x_n}{h}$.

Вариант №2

В5

$$h = \frac{b-a}{n},$$

тогда $\int_a^b f(x) dx \approx h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \pm R_n$ (формула левых прямоугольников)

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i) \pm R_n$$
 (формула правых прямоугольников),

где $R_n \leq \frac{h}{2}(b-a)M_1$, $M_1 = \max |f'(x)|$, $[a, b]$.

$\int_a^b f(x) dx \approx h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) \pm R_n$, (формула трапеций),

где $y_i = f(x_i)$, $R_n \leq \frac{h^2}{12}(b-a)M_2$;

$$M_2 = \max |f''(x)|, [a, b].$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [(y_0 + y_n) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})],$$

где n – обязательно четное,

$$R_n \leq \frac{h^4}{180}(b-a) \cdot M_3,$$

цифра меньше пяти, то содержимое сохраняемых разрядов не изменяется; в противном случае в младший сохраняемый разряд добавляется единица с тем же знаком, что и у самого числа. При решении больших задач производятся миллиарды вычислений, но так как погрешности имеют разные знаки, то они частично взаимокompенсируются.

Различают *абсолютную* и *относительную* погрешности.

Пусть a – точное числовое значение некоторой величины, а a^* – известное приближенное значение этой величины, тогда величину

$$\Delta(a^*) = |a - a^*|$$

называют абсолютной погрешностью числа a^* , а величину

$$\delta(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{|a^*|}$$

– его относительной погрешностью.

При сложении и вычитании складываются абсолютные погрешности, а при делении и умножении – относительные погрешности.

1.2. Корректность

Понятие *корректности* учитывает достаточно естественные требования, т. к. чтобы численно решать задачу, нужно быть уверенным, что ее ре-

шение *существует*. Столь же естественны требования *единственности и устойчивости* решения.

Решение задачи y^* называется устойчивым по исходным данным x^* , если оно зависит от исходных данных непрерывным образом. Это означает, что малому изменению исходных данных соответствует малое изменение решения. Строго говоря, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что всякому исходному данному x^* , удовлетворяющему условию

$$|x - x^*| < \delta,$$

соответствует приближенное решение y^* , для которого $|y - y^*| < \varepsilon$.

Говорят, что задача поставлена *корректно*, если выполнены следующие три условия:

1. Решение существует при любых допустимых исходных данных.
2. Это решение единственно.
3. Это решение устойчиво по отношению к малым изменениям исходных данных.

Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, задача называется *некорректной*.

1.3. Численные методы

Под *численными методами* понимаются методы, которые используются в вычислительной математике для преобразования задач к виду,

Вариант №1

B4

$$y = -\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - \frac{25}{3}x + 3$$

Вариант №2

B4

$$0, 2(x^3 - 13x^2 + 69x - 92)$$

Вариант №3

B4

$$y = 2x - 1$$

Вариант №1

B5

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(\kappa_1^{(i)} + 2\kappa_2^{(i)} + 2\kappa_3^{(i)} + \kappa_4^{(i)}),$$

где $\kappa_1^{(i)} = \hbar \cdot f(x_i; y_i)$

$$\kappa_2^{(i)} = \hbar \cdot f\left(x_i + \frac{\hbar}{2}; y_i + \frac{\kappa_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$\kappa_3^{(i)} = \hbar \cdot f\left(x_i + \frac{\hbar}{2}; y_i + \frac{\kappa_2^{(i)}}{2}\right),$$

$$\kappa_4^{(i)} = \hbar \cdot f(x_i + \hbar; y_i + \kappa_3^{(i)}),$$

причем $x_i = x_0 + i \cdot \hbar; (i = 0, 1, 2, \dots, n)$

Ключи верных ответов

Часть А

	<u>Вариант № 1</u>	<u>Вариант № 2</u>	<u>Вариант № 3</u>
A1	2	2	1
A2	3	3	2
A3	2	4	1
A4	1	2	3
A5	1	2	4
A6	2	3	1
A7	4	2	1
A8	4	3	2
A9	3	1	2
A10	2	3	1

Часть В

	<u>Вариант № 1</u>	<u>Вариант № 2</u>	<u>Вариант № 3</u>
B1	$\approx 1,22$	$\approx 1,27$	$\approx 1,57$
B2	$\approx 0,41$	$\approx -0,42$	$\approx 1,76$
B3	$M=\{(1;1;1)\}$	$M=\{(-1;3;2)\}$	$M=\{(2;-3;-1)\}$

удобному для реализации на ЭВМ. Рассмотрим два класса методов.

1. *Прямые методы.* Метод решения задачи называется *прямым*, если он позволяет получить решение после выполнения конечного числа элементарных операций. Наименование элементарной операции здесь условно. Важно то, что ее сложность существенно меньше, чем сложность основной задачи. Иногда прямые методы называют *точными*, имея в виду, что при отсутствии ошибок в исходных данных и при выполнении элементарных операций результат будет точным. Однако, при реализации метода на ЭВМ неизбежны ошибки округления и, как следствие, наличие вычислительной погрешности.

2. *Итерационные методы.* Суть *итерационных методов* состоит в построении последовательных приближений к решению задачи. Вначале выбирают одно или несколько начальных приближений, а затем последовательно, используя найденные ранее приближения и однотипную процедуру расчета, строят новые приближения. В результате такого *итерационного процесса* можно теоретически построить бесконечную последовательность приближений к решению. Если эта последовательность сходится (что бывает не всегда), то говорят, что итерационный метод сходится. Отдельный шаг итерационного процесса называется *итерацией*.

Практически вычисления не могут продолжаться бесконечно долго. Поэтому необходимо выбрать *критерий окончания итерационного процесса*. Критерий окончания связан с требуемой точностью вычислений, а именно: вычисления заканчиваются, когда погрешность приближения не превышает заданной величины.

Оценки погрешности приближения, полученные до вычислений, называют *априорными оценками* (от лат. a'priori – «до опыта»), а соответствующие оценки, полученные в ходе вычислений, называют *апостериорными оценками* (от лат. a'posterio'ri – «после опыта»).

Важной характеристикой итерационных методов является *скорость сходимости* метода. Говорят, что метод имеет *p*-ый порядок сходимости если

$$|x_{n+1} - x^*| = C|x_n - x^*|^p,$$

где x_n и x_{n+1} – последовательные приближения, полученные в ходе итерационного процесса вычислений, x^* – точное решение, C – константа, не зависящая от n . Говорят, что метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$, если для всех n справедлива оценка:

$$|x_n - x^*| \leq Cq^n.$$

Итерационный процесс называется *одношаговым*, если для вычисления очередного прибли-

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25. \end{cases}$$

V4. Построить многочлен, график которого проходит через точки (2; 3); (4; 7); (5; 9); (10; 19).

V5. Записать интерполяционные формулы Ньютона.

- 2) 2; 4) 4.

A8. К какому типу методов относится метод Гаусса?

- 1) прямые; 2) итерационные.

A9. В какой форме можно получить решение обыкновенного дифференциального уравнения по методу Рунге – Кутты?

- 1) график;
2) таблица значений;
3) аналитическое выражение.

A10. Значение функции y , определяемой дифференциальным уравнением $y' = x^2 + y^2$, при начальном условии $y(0) = 0$, найденное методом Эйлера с шагом $h = 0,1$ при $x = 0,3$ равно:

- 1) 0,005; 3) 0,041;
2) 0,21; 4) 0,85.

Часть 2

B1. Методом половинного деления (методом проб) уточните с точностью до 0,01 корень уравнения $x^3 + 2x - 7 = 0$ на $[1; 2]$.

B2. Методом итераций найти приближенное значение корня уравнения $2 - \lg x - x = 0$ с точностью до 0,01 на $[1; 2]$.

B3. Методом Гаусса (с помощью расчетной таблицы) решите систему уравнений:

жения x_{n+1} используется только одно предыдущее приближение x_n и k –шаговым, если для вычисления x_{n+1} используются k предыдущих приближений $x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \dots, x_n$.

Тема 2. Решение нелинейных уравнений

2.1. Постановка задачи

Пусть дана некоторая функция $f(x)$ и требуется найти все или некоторые значения x , для которых

$$f(x) = 0. \quad (2.1)$$

Значение x^* , при котором $f(x^*) = 0$, называется *корнем* (или *решением*) уравнения (2.1).

Относительно функции $f(x)$ часто предполагается, что $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности корня.

Корень x^* уравнения (2.1) называется *простым*, если первая производная функции $f(x)$ в точке x^* не равна нулю, т. е. $f'(x^*) \neq 0$. Если же $f'(x^*) = 0$, то корень x^* называется *кратным корнем*.

Геометрически корень уравнения (2.1) есть точка пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью абсцисс. На рис. 2.1 изображен график функции $y = f(x)$, имеющей четыре корня: два простых (x_1^* и x_3^*) и два кратных (x_2^* и x_4^*).

Большинство методов решения уравнения (2.1) ориентировано на отыскание простых корней уравнения (2.1).

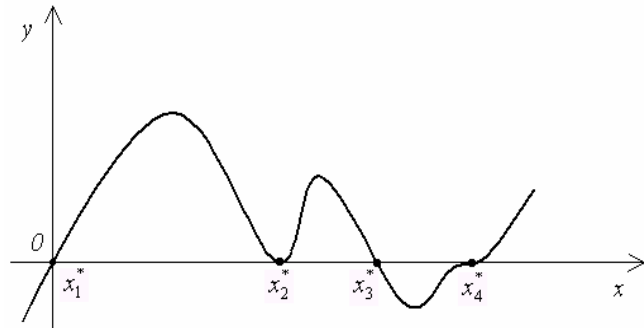


Рис. 2.1.

2.2. Основные этапы отыскания решения

В процессе приближенного отыскания корней уравнения (2.1) обычно выделяют два этапа: *локализация* (или *отделение*) *корня* и *уточнение* *корня*.

Локализация корня заключается в определении отрезка $[a, b]$, содержащего один и только один корень. Не существует универсального алгоритма локализации корня. В некоторых случаях отрезок локализации может быть найден из физических соображений. Иногда удобно бывает локализовать корень с помощью построения графика или таблицы значений функции $y = f(x)$. На наличие корня на отрезке $[a, b]$ указывает различие знаков функции на концах отрезка. Основанием

при условии $x + y = 1$.

- | | |
|----------------|---|
| 1) $M(0; 1)$; | 3) $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; |
| 2) $M(1; 0)$; | 4) $M(2; -1)$ |

A5. Вычислите по формуле трапеций $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \cdot x}{1+x} dx$ с

точностью до 0,01, приняв $n = 6$.

- | | |
|----------|----------|
| 1) 1,28; | 3) 1,85; |
| 2) 0,42; | 4) 0,67. |

A6. Даны десятичные логарифмы чисел:

- $lg 2,0 = 0,30103$;
 $lg 2,1 = 0,32222$;
 $lg 2,2 = 0,34242$;
 $lg 2,3 = 0,36173$;
 $lg 2,4 = 0,38021$;
 $lg 2,5 = 0,39794$.

Пользуясь интерполяционной формулой Ньютона найти $lg 2,03$.

- | | |
|-------------|-------------|
| 1) 0,30750; | 3) 0,36852; |
| 2) 0,12981; | 4) 0,33221. |

A7. Функция задана таблицей значений. Найти значение функции в точке $x = 1$.

x	0	2	3	4
y	3	1	5	7

- | | |
|-----------|-----------|
| 1) -1 ; | 3) -3 ; |
|-----------|-----------|

В4. Построить многочлен, принимающий значения, заданные таблицей.

x	1	3	4	6
y	-7	5	8	14

В5. Запишите все известные Вам формулы численного интегрирования.

Вариант №3

Часть 1

A1. Отделите корни уравнения графически и укажите их количество $2x + \lg(2x+3) = 1$.

- 1) 1; 3) 3;
2) 2; 4) 4.

A2. Отделите корни многочлена аналитически и укажите их количество. $x^4 - x - 1 = 0$.

- 1) 1; 3) 3;
2) 2; 4) 4.

A3. Вычислите по формуле Симпсона $\int_4^8 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$, приняв $n = 8$. Вычисления вести с пятью знаками после запятой.

- 1) 1,169172; 3) 3,051213;
2) 2,543081; 4) 4,083182.

A4. Методом множителей Лагранжа найти условный экстремум функции $f(x,y) = x^2 + y^2$

для этого служит следующая теорема математического анализа.

Теорема 2.1. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, так, что $f(a)f(b) < 0$, то отрезок $[a, b]$ содержит, по крайней мере, один корень уравнения $f(x) = 0$.

Однако корень четной кратности таким образом локализовать нельзя, так как в окрестности такого корня функция $f(x)$ имеет постоянный знак.

На этапе уточнения корня вычисляют приближенное значение корня с заданной точностью $\varepsilon > 0$. Приближенное значение корня уточняют с помощью различных итерационных методов. Суть этих методов состоит в последовательном вычислении значений $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$, которые являются приближениями к корню x^* .

2.3. Метод половинного деления (метод дихотомии, метод проб, метод бисекции)

Метод деления отрезка пополам является самым простым и надежным способом решения нелинейного уравнения.

Пусть из предварительного анализа известно, что корень уравнения (2.1) находится на отрезке $[a_0, b_0]$, т. е. $x^* \in [a_0, b_0]$, так, что $f(x^*) = 0$.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a_0, b_0]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков, т.е.

$$f(a_0)f(b_0) < 0. \quad (2.2)$$

Разделим отрезок $[a_0, b_0]$ пополам. Получим точку

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Вычислим значение функции в этой точке: $f(x_0)$. Если $f(x_0) = 0$, то x_0 – искомый корень, и задача решена. Если $f(x_0) \neq 0$, то $f(x_0)$ – число определенного знака:

$$f(x_0) > 0, \text{ либо } f(x_0) < 0.$$

Тогда либо на концах отрезка $[a_0, x_0]$, либо на концах отрезка $[x_0, b_0]$ значения функции $f(x)$ имеют разные знаки. Обозначим такой отрезок $[a_1, b_1]$. Очевидно, что $x^* \in [a_1, b_1]$, и длина отрезка $[a_1, b_1]$ в два раза меньше, чем длина отрезка $[a_0, b_0]$. Поступим аналогично с отрезком $[a_1, b_1]$. В результате получим либо корень x^* , либо новый отрезок $[a_2, b_2]$, и т.д. (рис. 2.2).

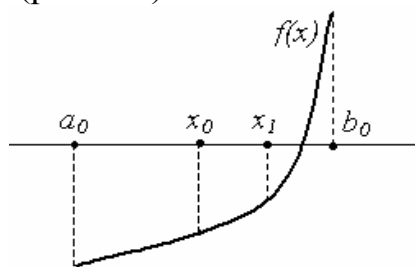


Рис. 2.2.

3) аналитическое выражение.

A9. Как связана степень интерполяционного многочлена с количеством узлов интерполяции?

- | | |
|--------------------------|--------------------|
| 1) не больше (\leq); | 3) меньше ($<$); |
| 2) равна ($=$); | 4) больше ($>$). |

A10. Значение функции y , определяемой дифференциальным уравнением $y' = 1 + x + y^2$, при начальном условии $y(0) = 1$, найденное методом Эйлера с шагом $h = 0,1$ при $x = 0,2$.

- | | |
|----------|----------|
| 1) 1,81; | 3) 1,45; |
| 2) 1,56; | 4) 1,38. |

Часть 2

B1. Методом половинного деления (методом проб) уточните с точностью до 0,01 корень уравнения $x^5 - x - 2 = 0$ на $[1; 2]$.

B2. Методом простой итерации найти приближенное значение корня уравнения $x^3 - 12x - 5 = 0$ с точностью до 0,01 на $[-1; 0]$.

B3. Методом Гаусса (с помощью расчетной таблицы) решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

2) $M\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right);$ 4) $M\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{3}\right).$

A5. Вычислите по формуле трапеций

$$\int_0^1 x^2 \cdot \sin x \, dx,$$

приняв $n = 10$ с точностью до 0,001.

- 1) 0,119; 3) 1,012;
2) 0,225; 4) 1,897.

A6. Зная квадраты чисел 5; 6; 7; 8, найти квадрат числа 6,25, пользуясь интерполяционной формулой Ньютона.

- 1) 37,0125; 3) 39,0625;
2) 38,0625; 4) 39,0125.

A7. Дана таблица значений функции

x	321	322.8	324.2	325
y	2.50651	2.50893	2.51081	2.51188

Найдите значения функции

в точке $x = 323,5$.

- 1) 2,44081; 3) 2,48812;
2) 2,50987; 4) 2,31245.

A8. В какой форме можно получить решение обыкновенного дифференциального уравнения по методу Пикара?

- 1) график;
2) таблица;

Середина n -го отрезка $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$. Очевидно, что длина отрезка $[a_n, b_n]$ будет равна $\frac{b_0 - a_0}{2^n}$, а так как $x^* \in [a_n, b_n]$, то

$$|x_n - x^*| \leq \frac{b_n - a_n}{2} \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}. \quad (2.3)$$

Погрешность метода. Оценка (2.3) характеризует погрешность метода деления отрезка пополам и указывает на скорость сходимости: метод сходится со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой $q = 1/2$. Заметим, что оценка (2.3) является априорной.

Критерий окончания. Из соотношения (2.3) следует, что при заданной точности приближения ε вычисления заканчиваются, когда будет выполнено неравенство $b_n - a_n < 2\varepsilon$ или неравенство $n > \log_2((b_0 - a_0)/\varepsilon) - 1$. Таким образом, количество итераций можно определить заранее. За приближенное значение корня берется величина x_n .

Пример 2.1.

Найдем приближенно $x = \sqrt[5]{2}$ с точностью $\varepsilon = 0.01$. Эта задача эквивалентна решению уравнения $x^5 - 2 = 0$, или нахождению нуля функции $f(x) = x^5 - 2$. В качестве начального отрезка $[a_0, b_0]$ возьмем отрезок $[1, 2]$. На концах этого отрезка функция принимает значения с разными знаками:

$$f(1) < 0, f(2) > 0.$$

Найдем число n делений отрезка $[1, 2]$, необходимых для достижения требуемой точности. Имеем:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{2-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-2}, n \geq 6.$$

Следовательно, не позднее 6-го деления найдем $\sqrt[5]{2}$ с требуемой точностью, $\sqrt[5]{2} \approx 1.1484$. Результаты вычислений представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

n	0	1	2	3	4	5	6
a_n	1.0000	1.0000	1.0000	1.1250	1.1250	1.1406	1.1406
b_n	2.0000	1.5000	1.2500	1.2500	1.1875	1.1875	1.1562
x_n	1.5000	1.2500	1.1250	1.1875	1.1406	1.1562	1.1484
$\exists_n f(a_n)$	-	-	-	-	-	-	-
$\exists_n f(b_n)$	+	+	+	+	+	+	+
$f(x_n)$	5.5938	0.7585	-0.2959	-0.0691	0.1812	0.0532	-0.0078
$b_n - a_n$	1.0000	0.5000	0.2500	0.1250	0.0625	0.0312	0.0156

2.4. Метод простых итераций

Пусть уравнение (2.1) можно заменить эквивалентным ему уравнением

$$x = \varphi(x). \quad (2.4)$$

Например, уравнение $\frac{x}{\sin x} - 0.5 = 0$ можно заменить эквивалентным ему уравнением $x = 0.5 \sin x$.

Выберем каким-либо образом начальное приближение x_0 . Вычислим значение функции $\varphi(x)$ при $x = x_0$ и найдем уточненное значение

дифференциальных уравнений (решение задачи Коши).

Вариант №2

Часть 1

A1. Отделите корни уравнения графически и укажите их количество

$$2 \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right) + x^2 - 3x + 2 = 0.$$

- 1) 1;
- 2) 2;
- 3) 3;
- 4) 4.

A2. Отделите корни уравнения аналитически и укажите их количество

$$x^3 - 10x + 4 = 0.$$

- 1) 1;
- 2) 2;
- 3) 3;
- 4) 4.

A3. Вычислите по формуле Симпсона $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ с

точностью до 0,0001, приняв $n = 10$.

- 1) 1,5012;
- 2) 0,4857;
- 3) 2,1432;
- 4) 0,5000.

A4. Методом множителей Лагранжа найти экстремум функции $f(x, y) = x \cdot y$ при условии $2x + 3y = 5$.

- 1) M (1; 1);
- 3) M ($\frac{1}{2}; \frac{5}{3}$);

ном условии $y(2) = 4$, найденное методом Эйлера с шагом $h = 0,1$ при $x = 2,3$ равно

- 1) 9,81; 3) 5,91;
2) 18,78; 4) 20,45.

Часть 2

Решите задание, полученный ответ запишите на бланке, рядом с номером выполненного задания.

В1. Методом половинного деления (методом проб) уточните с точностью до 0,01 корень уравнения $x^4 - x - 1 = 0$ на $[1;2]$.

В2. Методом простой итерации найти приближенное значение корня уравнения $x^3 - 10x + 4 = 0$ с точностью до 0,01 на $[0;1]$.

В3. Методом Гаусса (с помощью расчетной таблицы) решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

В4. Даны точки $(0;3)$, $(2;1)$, $(3;5)$, $(4;7)$. Составить уравнение многочлена, принимающего указанные значения при заданных значениях аргумента.

В5. Записать расчетные формулы метода Рунге-Кутты приближенного решения обыкновенных

$x_1 = \varphi(x_0)$. Подставим теперь x_1 в уравнение (2.4) и получим новое приближение $x_2 = \varphi(x_1)$ и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность приближений к корню:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n). \quad (2.5)$$

Формула (2.5) является *расчетной формулой* метода простых итераций. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится при $n \rightarrow \infty$, т. е. существует

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad (2.6)$$

и функция $\varphi(x)$ непрерывна, то, переходя к пределу в (2.5) и учитывая (2.6), получим:

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}) = \varphi(x^*).$$

Таким образом, $x^* = \varphi(x^*)$, следовательно, x^* – корень уравнения (2.4).

Сходимость метода. Сходимость метода простых итераций устанавливает следующая теорема.

Теорема 2.2. Если в интервале, содержащем корень x^* уравнения (2.4), а также его последовательные приближения $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$, вычисляемые по формуле (2.5), выполнено условие:

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1, \quad (2.7)$$

то $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, т. е. итерационный процесс сходится

и справедлива следующая оценка погрешности:

$$|x_n - x^*| \leq q^n |x_0 - x^*| \quad (2.8)$$

Оценка (2.8) является априорной. Она показывает, что метод простой итерации сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q . Чем меньше q , тем выше скорость сходимости.

Как следует из теоремы 2.2, условие (2.7) является *достаточным* для сходимости метода простых итераций. Его выполнение гарантирует сходимость процесса (2.5), но невыполнение условия (2.7), вообще говоря, не означает, что итерационный процесс будет расходиться.

На рис. 2.3 – 2.6 показаны четыре случая взаимного расположения линий $y = x$ и $y = \varphi(x)$ и соответствующие итерационные процессы.

Рис. 2.3 и 2.4 соответствуют случаю $|\varphi'(x)| < 1$, и итерационный процесс сходится.

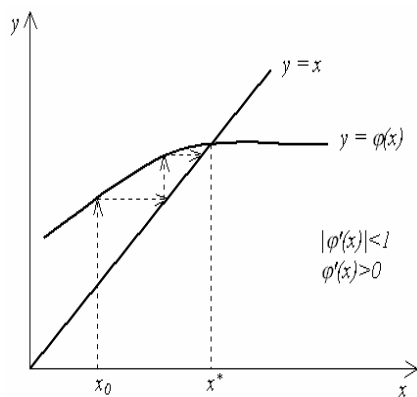


Рис. 2.3.

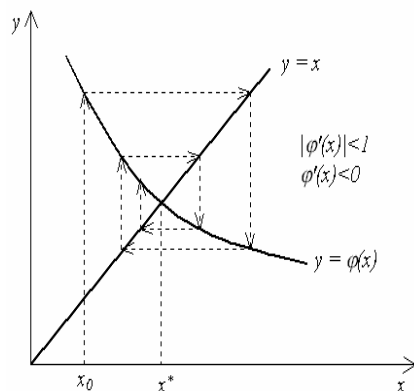


Рис. 2.4.

найти значения y при $x = 3,1$, пользуясь интерполяционной формулой Ньютона.

- 1) 20;
- 2) 13,71;
- 3) 24;
- 4) 15,82.

A7. Имеется таблица функций:

x	0.41	1.55	2.67	3.84
y	2.63	3.75	4.87	5.03

Требуется получить значение этой функции в точке $x = 1,91$, пользуясь интерполяционным многочленом Лагранжа.

- 1) 1,25;
- 2) 2,15;
- 3) 3,35;
- 4) 4,15.

A8. Как связана степень интерполяционного многочлена с количеством узлов интерполяции?

- 1) равна (=);
- 2) больше (>);
- 3) меньше (<);
- 4) не больше (\leq).

A9. В какой форме можно получить решение обыкновенного дифференциального уравнения по методу Эйлера?

- 1) график;
- 2) аналитическое выражение;
- 3) таблица значений.

A10. Значение функции y , определяемой дифференциальным уравнением $y' = y^2 + \frac{y}{x}$, при началь-

- 1) 1; 3) 3;
2) 2; 4) 4.

A2. Отделите корни уравнения аналитически и укажите их количество: $x^3 - 12x - 5 = 0$.

- 1) 1; 3) 3;
2) 2; 4) 4.

A3. Вычислите по формуле трапеций $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ с точ-

ностью до 0,01, приняв $n = 5$.

- 1) 0,51; 3) 0,81;
2) 0,69; 4) 0,99.

A4. Методом множителей Лагранжа найти экстремум функции $f(x,y) = x^2 + y^2$ при условии $x \cdot y = 16$.

- 1) M (4; 4); 3) M (2; 8);
2) M (8; 2); 4) M (1; 16).

A5. Вычислите по формуле Симпсона $\int_0^1 x^2 \sin x dx$,

приняв $n = 10$, с точностью 10^{-6}

- 1) 0,2232396; 3) 0,5142317;
2) 1,2122234; 4) 2,0013427.

A6. Из таблицы

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	7	13	21	31	43	57

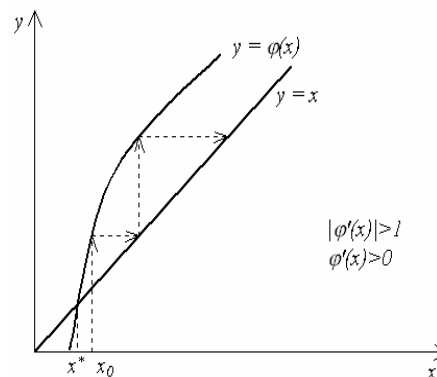


Рис. 2.5.

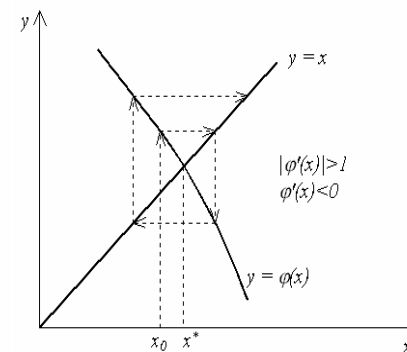


Рис. 2.6.

При этом если $\varphi'(x) > 0$ (рис. 2.3), сходимость носит односторонний характер, а если $\varphi'(x) < 0$ (рис. 2.4), сходимость носит двусторонний, колебательный характер. Рис. 2.5 и 2.6 соответствуют случаю $|\varphi'(x)| > 1$ – итерационный процесс расходится. При этом может быть односторонняя (рис. 2.5) и двусторонняя (рис 2.6) расходимость.

Погрешность метода. Если известна величина q в условии (2.7), то применима следующая апостериорная оценка погрешности:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|, n > 1. \quad (2.9)$$

Критерий окончания. Из оценки (2.9) вытекает следующий критерий окончания итерационного

процесса. Вычисления следует продолжать до выполнения неравенства

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-q}{q} \varepsilon.$$

Если это условие выполнено, то можно считать, что x_n является приближением к x^* с точностью ε .

Если $q \leq 0.5$, то можно пользоваться более простым критерием окончания:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon. \quad (2.10)$$

Пример 2.2.

Используем метод простой итерации для решения уравнения $f(x) = \sin x - x^2 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Преобразуем уравнение к виду (2.4):

$$x = \frac{\sin x}{x}, \text{ т. е. } \varphi(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Нетрудно убедиться, что корень уравнения находится на отрезке $[\pi/6, \pi/3]$. Например, вычислив значения $f(x)$ на концах отрезка, получим: $f(\pi/6) > 0$, а $f(\pi/3) < 0$, т. е. функция на концах отрезка имеет разные знаки, что в соответствии с теоремой 2.1 указывает на то, что внутри отрезка есть корень. Расположение корня наглядно иллюстрирует рис.2.7.

Примеры тестовых заданий

На выполнение теста отводится 3 часа (180 минут).

В каждый тест входит 20 заданий разного уровня сложности.

В задачах первого уровня сложности ставится цель проверить знание основных понятий и формул по темам, выносимым на тестирование, а также выявить навыки решения стандартных задач.

Задачи второго уровня требуют основательного знания теоретического материала и умение применить его в нестандартной ситуации.

В тесте использованы две формы заданий: с выбором ответа и с полным развернутым ответом. В каждом тесте 15 заданий типа А с выбором одного ответа из четырех приведенных и пять заданий типа В, в которых не предлагаются варианты ответов. В задачах типа В необходимо провести логически и математически грамотные рассуждения, получить полное решение и записать ответ на бланке.

Вариант №1

Часть 1

Решите задание, сравните полученный ответ с предложенным. Выбранный ответ отметьте.

A1. Отделите корни уравнения $\cos x - x^2 = 0$ графически и укажите их количество.

Контрольная работа №4

Задача 1. Составить интерполяционный многочлен Лагранжа для следующей таблицы значений:

x	1	3	4	6
y	-7	5	8	14

Задача 2. Вычислить по формуле трапеций:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x},$$

приняв $n = 5$ и сравнить с истинным значением интеграла.

Задача 3. Вычислить приближенное значение производной функции, заданной таблицей, в точке $x_0 = 4$

x	3	4	5
y	2	-1	6

$y'(x_0) = ?$

Задача 4. Методом Эйлера найти первые четыре значения функции $y = y(x)$, определяемой дифференциальным уравнением

$$y' = \frac{y - x}{y + x}$$

при начальном условии $y(0) = 1$; взять шаг $h = 0,1$.

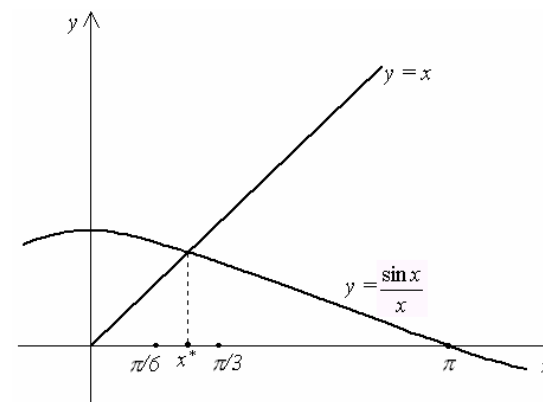


Рис. 2.7.

Подсчитаем, первую и вторую производные функции $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, \quad \varphi''(x) = \frac{\sin x(2 - x^2)}{x^3}.$$

Так как $\varphi''(x) > 0$ на отрезке $[\pi/6, \pi/3]$, то производная $\varphi'(x)$ монотонно возрастает на этом отрезке и принимает максимальное значение на правом конце отрезка, т. е. в точке $\pi/3$. Поэтому, справедлива оценка:

$$|\varphi'(x)| \leq |\varphi'(\pi/3)| \approx 0.312.$$

Таким образом, условие (2.7) выполнено, $q < 0.5$, и можно воспользоваться критерием окончания вычислений в виде (2.10). В табл. 2.2 приведены приближения, полученные по расчетной формуле (2.5). В качестве начального приближения выбрано значение $x_0 = 1$.

Таблица 2.2.

n	x_n
0	1
1	0.8415
2	0.8861
3	0.8742
4	0.8774
5	0.8765

Критерий окончания выполняется при $n = 5$,

$$|x_5 - x_4| < 0.001.$$

Сходимость двусторонняя, качественный характер такой сходимости представлен на рис. 2.4. Приближенное значение корня с требуемой точностью $x^* \approx 0.8765$.

2.5. Метод Ньютона (метод касательных)

Метод Ньютона является наиболее эффективным методом решения нелинейных уравнений.

Пусть корень $x^* \in [a, b]$, так, что $f(a)f(b) < 0$. Предполагаем, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дважды непрерывно дифференцируема на интервале (a, b) . Положим $x_0 = b$. Проведем касательную к графику функции $y = f(x)$ в точке $B_0 = (x_0, f(x_0))$ (рис. 2.8).

Задача 5. Набор экспериментальных значений x и y имеет вид таблицы:

x	1.20	1.57	1.94	2.31	2.68	3.05	3.42	3.79
y	2.59	2.06	1.58	1.25	0.91	0.66	0.38	0.21

Построить методом наименьших квадратов эмпирическую формулу и вычислить характеристики качества построенного приближения.

Контрольная работа № 3

Задача 1. Отделить корни уравнения графически и уточнить один из них методом половинного деления с точностью до 0,01:

$$x^5 - x - 2 = 0.$$

Задача 2. Отделить корни уравнения аналитически и уточнить один из них с точностью до 0,01:

$$x^3 - 12x - 5 = 0.$$

Задача 3. Методом Гаусса (с помощью расчетной таблицы) решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Задача 4. Методом множителей Лагранжа найти условный экстремум функции

$$f(x; y) = 6 - 4x - 3y,$$

при условии $x^2 + y^2 = 1$

Задача 2. Дана таблица значений функции:

x	1.2	1.9	3.3	4.7
$f(x)$	0.3486	1.0537	1.7844	2.2103

Вид функции: $f(x) = \ln 2,3x - \frac{0,8}{x}$.

Найти значение этой функции в точке $x = 4$, пользуясь интерполяционным многочленом Лагранжа. Оценить погрешность. Результат интерполирования сравнить с вычислением значения функции по её выражению.

Задача 3. Стационарное распределение температуры в теплоизолированном тонком стержне описывается линейной функцией. Дана таблица измеренных температур в соответствующих точках стержня:

x	0	2	6	8	10	14	16	20
y	32.0	29.2	23.3	19.9	17.2	11.3	7.8	2.0

Методом наименьших квадратов найти эту функцию. Оцените качество полученного приближения.

Задача 4. Методом наименьших квадратов подобрать показательную функцию по следующим табличным данным:

x	2.2	2.7	3.5	4.1
y	67	60	53	50

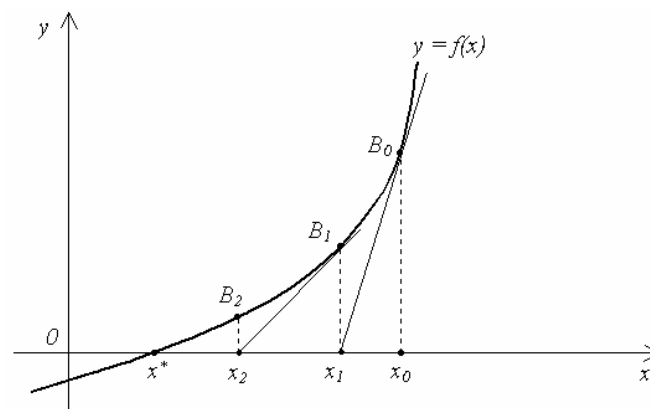


Рис. 2.8.

Уравнение касательной будет иметь вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (2.11)$$

Первое пересечение получим, взяв абсциссу точки пересечения этой касательной с осью OX , т. е. положив в (2.11) $y = 0$, $x = x_1$:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \quad (2.12)$$

Аналогично поступим с точкой $B_1(x_1, f(x_1))$, затем с точкой $B_2(x_2, f(x_2))$, и так далее, в результате получим последовательность приближений $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, причем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (2.13)$$

Формула (2.13) является *расчетной формулой метода Ньютона*.

Метод Ньютона можно рассматривать как частный случай метода простых итераций, для которого

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \quad (2.14)$$

Сходимость метода. Сходимость метода Ньютона устанавливает следующая теорема.

Теорема 2.3. Пусть x^* – простой корень уравнения $f(x) = 0$, и в некоторой окрестности этого корня функция f дважды непрерывно дифференцируема. Тогда найдется такая малая σ -окрестность корня x^* , что при произвольном выборе начального приближения x_0 из этой окрестности итерационная последовательность, определенная по формуле (2.13) не выходит за пределы этой окрестности и справедлива оценка:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C |x_n - x^*|^2, \quad n \geq 0, \quad (2.15)$$

где $C = \sigma^{-1}$. Оценка (2.15) означает, что метод сходится с квадратичной скоростью.

Сходимость метода Ньютона зависит от того, насколько близко к корню выбрано начальное приближение. Неудачный выбор начального приближения может дать расходящуюся последовательность. Полезно иметь в виду следующее *достаточное условие сходимости метода*. Пусть $[a, b]$ – отрезок, содержащий корень. Если в каче-

Типовые контрольные работы

Контрольная работа №1

Задача 1. Отделить корни уравнения графически и уточнить один из них с точностью до 0,001 методом Ньютона (касательных):

$$x^3 + 3x + 5 = 0.$$

Задача 2. Вычислить по формуле Симпсона

$$\int_4^8 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}, \text{ приняв } n = 8.$$

Оценить погрешность по методу удвоения шага вычислений. Вычисления вести с пятью знаками после запятой. Сравнить со значением, найденным по формуле Ньютона – Лейбница.

Задача 3. Методом Рунге – Кутты решить задачу Коши для ОДУ

$$y' = \frac{x}{y} + 0,5y; \quad y(0)=1 \text{ на отрезке } [0; 0,5] \text{ с шагом } h =$$

0,1. Вычисления вести с тремя верными знаками.

Контрольная работа №2

Задача 1. Методом простой итерации решить СЛАУ с точностью до 0,001 ($\varepsilon=10^{-3}$)

$$\begin{cases} 0,63x_1 + 0,05x_2 + 0,15x_3 = 0,34, \\ 0,03x_1 + 0,34x_2 + 0,1x_3 = 0,32, \\ 0,15x_1 + 0,1x_2 + 0,71x_3 = 0,42. \end{cases}$$

стве начального приближения x_0 выбрать тот из концов отрезка, для которого

$$f(x)f''(x) \geq 0, \quad (2.16)$$

то итерации (2.13) сходятся, причем монотонно. Рис. 2.8 соответствует случаю, когда в качестве начального приближения был выбран правый конец отрезка: $x_0 = b$.

Погрешность метода. Оценка (2.15) является априорной и неудобна для практического использования. На практике удобно пользоваться следующей апостериорной оценкой погрешности:

$$|x_n - x^*| \leq |x_n - x_{n-1}|. \quad (2.17)$$

Критерий окончания. Оценка (2.17) позволяет сформулировать следующий критерий окончания итераций метода Ньютона. При заданной точности $\varepsilon > 0$ вычисления нужно вести до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon. \quad (2.18)$$

Пример 2.3.

Применим метод Ньютона для вычисления $\sqrt[p]{a}$. где $a > 0$, p – натуральное число. Вычисление $\sqrt[p]{a}$ эквивалентно решению уравнения $x^p = a$. Таким образом, нужно найти корень уравнения

$$f(x) = 0, f(x) = x^p - a, f'(x) = px^{p-1}.$$

Итерационная формула метода (2.13) примет вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n)^p - a}{p(x_n)^{p-1}} = \frac{p-1}{p} x_n + \frac{a}{p(x_n)^{p-1}}. \quad (2.19)$$

Используя формулу (2.19), найдем $\sqrt[3]{7}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$x_{n+1} = \frac{2}{3} x_n + \frac{7}{3(x_n)^2}.$$

Простой корень уравнения $x^3 - 7 = 0$ расположен на отрезке $[1, 2]$. Действительно, на концах отрезка $[1, 2]$ функция $f(x) = x^3 - 7$ принимает разные знаки, $f(1) < 0, f(2) > 0$. Кроме того, при $x = 2$ выполнено достаточное условие сходимости (2.16): $f(2)f''(2) \geq 0$.

Поэтому в качестве начального приближения можно взять $x_0 = 2$. Результаты приведены в табл. 2.3.

n	x_n
0	2
1	0.8415
2	0.8861
3	0.8742
4	0.8774
5	0.8765

Таблица 2.3

$$k_i^2 = 2\left(t_i + \frac{h}{2}\right)(y_i + \frac{h}{2}k_i^1), \quad (6.21)$$

$$k_i^3 = 2\left(t_i + \frac{h}{2}\right)(y_i + \frac{h}{2}k_i^2),$$

$$k_i^4 = 2(t_i + h)(y_i + hk_i^3),$$

$$i = 0, 1, \dots, 10.$$

Задача (6.20) имеет точное решение: $y(t) = e^{t^2}$, поэтому погрешность определяется как абсолютная величина разности между точными и приближенными значениями $\varepsilon_i = |y(t_i) - y_i|$.

Найденные по формулам (6.21) приближенные значения решения y_i и их погрешности ε_i представлены в таблице 6.5:

Таблица 6.5

t_i	y_i	ε_i	t_i	y_i	ε_i
0.1	1.01005	10^{-9}	0.6	1.43333	$5 \cdot 10^{-7}$
0.2	1.04081	$4 \cdot 10^{-9}$	0.7	1.63232	$2 \cdot 10^{-6}$
0.3	1.09417	$2 \cdot 10^{-8}$	0.8	1.89648	$3 \cdot 10^{-6}$
0.4	1.17351	$6 \cdot 10^{-8}$	0.9	2.24790	$6 \cdot 10^{-6}$
0.5	1.28403	$2 \cdot 10^{-7}$	1.0	2.71827	$2 \cdot 10^{-5}$

$$R \approx \frac{1}{15} |y_i^{h/2} - y_i^h|. \quad (6.18)$$

Используя правило Рунге, можно построить процедуру приближенного вычисления решения задачи Коши методом Рунге – Кутта четвертого порядка точности с заданной точностью ε . Нужно, начав вычисления с некоторого значения шага h , последовательно уменьшать это значение в два раза, каждый раз вычисляя приближенное значение $y_i^{h/2}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Вычисления прекращаются тогда, когда будет выполнено условие:

$$R \approx \frac{1}{15} |y_i^{h/2} - y_i^h| < \varepsilon. \quad (6.19)$$

Приближенным решением будут значения $y_i^{h/2}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Пример 6.4.

Методом Рунге – Кутта четвертого порядка точности найдем решение на отрезке $[0, 1]$ следующей задачи Коши.

$$y'(t) = 2t y, \quad y(0) = 1. \quad (6.20)$$

Возьмем шаг $h = 0.1$. Тогда $n = \frac{1-0}{0.1} = 10$.

В соответствии с (6.17) расчетные формулы примут вид:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} h(k_i^1 + 2k_i^2 + 2k_i^3 + k_i^4),$$

$$k_i^1 = 2t_i y_i,$$

2.6. Метод секущих (метод хорд)

В этом и следующем разделе рассмотрим модификации метода Ньютона.

Как видно из формулы (2.13), метод Ньютона требует для своей реализации вычисления производной, что ограничивает его применение. Метод секущих лишен этого недостатка. Если производную заменить ее приближением:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

то вместо формулы (2.13) получим

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \quad (2.20)$$

Это означает, что касательные заменены секущими. Метод секущих является двухшаговым методом, для вычисления приближения x_{n+1} необходимо вычислить два предыдущих приближения x_n и x_{n-1} , и, в частности, на первой итерации надо знать два начальных значения x_0 и x_1 .

Формула (2.20) является *расчетной формулой метода секущих*. На рис. 2.9 приведена геометрическая иллюстрация метода секущих.

Очередное приближение x_{n+1} получается как точка пересечения с осью OX секущей, соединяющей точки графика функции $f(x)$ с координатами

$$(x_{n-1}, f(x_{n-1})) \text{ и } (x_n, f(x_n)).$$

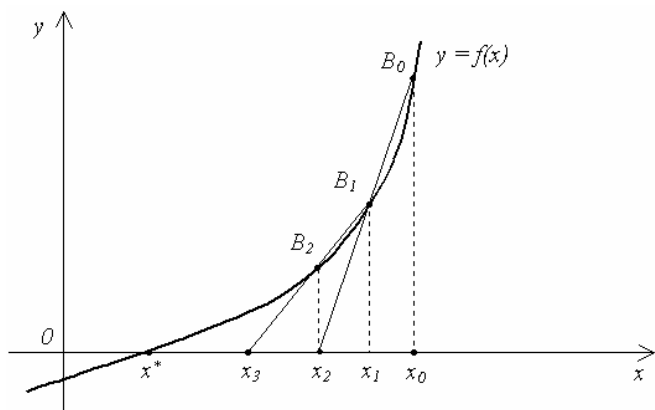


Рис. 2.9.

Сходимость метода. Сходимость метода секущих устанавливает следующая теорема.

Теорема 2.4. Пусть x^* – простой корень уравнения $f(x) = 0$, и в некоторой окрестности этого корня функция f дважды непрерывно дифференцируема, причем $f''(x) \neq 0$. Тогда найдется такая малая σ -окрестность корня x^* , что при произвольном выборе начальных приближений x_0 и x_1 из этой окрестности итерационная последовательность, определенная по формуле (2.20) сходится и справедлива оценка:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C |x_n - x^*|^p, \quad (2.21)$$

$$n \geq 0, p = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618.$$

Сравнение оценок (2.15) и (2.21) показывает, что $p < 2$, и метод секущих сходится медленнее, чем метод Ньютона. Но в методе Ньютона на каж-

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

с начальным условием

$$y(t_0) = y_0.$$

Как и в методе Эйлера, выберем шаг $h = \frac{T-t_0}{n}$ и построим сетку с системой узлов

$$t_i = t_0 + i h, i = 0, 1, \dots, n.$$

Обозначим через y_i приближенное значение искомого решения в точке t_i .

Приведем *расчетные формулы метода Рунге – Кутты четвертого порядка точности:*

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h(k_i^1 + 2k_i^2 + 2k_i^3 + k_i^4),$$

$$k_i^1 = f(t_i, y_i),$$

$$k_i^2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_i^1\right), \quad (6.17)$$

$$k_i^3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_i^2\right),$$

$$k_i^4 = f(t_i + h, y_i + hk_i^3),$$

$$i = 0, 1, \dots, n.$$

Оценка погрешности. Оценка погрешности метода Рунге – Кутты затруднительна. Грубую оценку погрешности дает правило Рунге (см. раздел 6.2). Так как метод Рунге – Кутта имеет четвертый порядок точности, т. е. $p = 4$, то оценка погрешности (6.6) примет вид

Решение представим в виде таблицы 6.4. Таблица заполняется последовательно по строкам, сначала первая строка, затем вторая и т. д. Третий столбец таблицы 6.4 содержит приближенное решение

$$y_i, i = 0, 1, \dots, 5.$$

Таблица 6.4

i	t_i	y_i	$\frac{h}{2}f(t_i, y_i)$	t_{i+1}	\tilde{y}_{i+1}	$f(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$
0	0	1	0.1	0.2	1.2	0.867
1	0.2	1.1867	0.0850	0.4	1.3566	0.767
2	0.4	1.3484	0.0755	0.6	1.4993	0.699
3	0.6	1.4938	0.0690	0.8	1.6180	0.651
4	0.8	1.6272	0.0645	1.0	1.7569	0.618
5	1.0	1.7542				

Сравним полученное приближенное решение с точным решением (6.11), представленном в таблице 6.2. Видим, что погрешность составляет

$$R = \max_{0 \leq k \leq 5} |y(t_k) - y_i| = 0.0222.$$

6.4. Метод Рунге – Кутта

Метод Рунге – Кутта является одним из наиболее употребительных методов высокой точности. Метод Эйлера можно рассматривать как простейший вариант метода Рунге – Кутта.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения

дой итерации надо вычислять и функцию, и производную, а в методе секущих – только функцию. Поэтому при одинаковом объеме вычислений в методе секущих можно сделать примерно вдвое больше итераций и получить более высокую точность.

Так же, как и метод Ньютона, при неудачном выборе начальных приближений (вдали от корня) метод секущих может расходиться. Кроме того применение метода секущих осложняется из-за того, что в знаменатель расчетной формулы метода (2.20) входит разность значений функции. Вблизи корня эта разность мала, и метод теряет устойчивость.

Критерий окончания. Критерий окончания итераций метода секущих такой же, как и для метода Ньютона. При заданной точности $\varepsilon > 0$ вычисления нужно вести до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon. \quad (2.22)$$

Пример 2.4.

Применим метод секущих для вычисления положительного корня уравнения $4(1 - x^2) - e^x = 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Корень этого уравнения находится на отрезке $[0, 1]$, так как

$$f(0) = 3 > 0, \text{ а } f(1) = -e < 0.$$

Подсчитаем вторую производную функции:

$$f''(x) = -8 - e^x.$$

Условие $f(x)f''(x) \geq 0$ выполняется для точки $b = 1$. В качестве начального приближения возьмем $x_0 = b = 1$. В качестве второго начального значения возьмем $x_1 = 0.5$. Проведем вычисления по расчетной формуле (2.20). Результаты приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

n	x_n
0	1.0000
1	0.5000
2	0.6660
3	0.7093
4	0.7033
5	0.7034

2.7. Метод ложного положения

Рассмотрим еще одну модификацию метода Ньютона.

Пусть известно, что простой корень x^* уравнения $f(x) = 0$ находится на отрезке $[a, b]$ и на одном из концов отрезка выполняется условие $f(x)f''(x) \geq 0$. Возьмем эту точку в качестве начального приближения. Пусть для определенности это будет b . Положим $x_0 = a$. Будем проводить из точки $B = (b, f(b))$ прямые через расположенные на графике функции точки B_n с координатами $(x_n, f(x_n))$, $n = 0, 1, \dots$. Абсцисса точки пересече-

$$y_i, i = 0, 1, \dots, 5.$$

Сравним полученное приближенное решение с точным решением (6.11), представленном в таблице 6.2. Видно, что погрешность составляет

$$R = \max_{0 \leq k \leq 5} |y(t_k) - y_i| = 0.0042.$$

Пример 6.3.

Применим второй модифицированный метод Эйлера – Коши для решения задачи Коши

$$y'(t) = y - \frac{2t}{y}, y(0) = 1,$$

рассмотренной ранее в примерах 6.1 и 6.2. Так же, как и ранее, зададим шаг $h = 0.2$. Тогда

$$n = \frac{1-0}{0.2} = 5.$$

В соответствии с (6.14) получим расчетную формулу метода Эйлера – Коши

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})] = \\ &= y_i + 0.1 [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})], \end{aligned}$$

где $f(t_i, y_i) = y_i - \frac{2t_i}{y_i}$, $\tilde{y}_{i+1} =$

$$= y_i + h f(t_i, y_i) = y_i + 0.1 \left(y_i - \frac{2t_i}{y_i} \right),$$

$$t_0 = 0, y_0 = 1, i = 0, 1, \dots, 4.$$

В соответствии с (6.3) получим расчетную формулу первого модифицированного метода Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + h f_{i+\frac{1}{2}} = y_i + 0.2 f_{i+\frac{1}{2}},$$

где $f_{i+\frac{1}{2}} = f(t_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}) = y_{i+\frac{1}{2}} - \frac{2t_{i+\frac{1}{2}}}{y_{i+\frac{1}{2}}},$

$$t_{i+\frac{1}{2}} = t_i + \frac{h}{2} = t_i + 0.1,$$

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i) = y_i + 0.1 \left(y_i - \frac{2t_i}{y_i} \right),$$

$$t_0 = 0, y_0 = 1, i = 0, 1, \dots, 4.$$

Решение представим в виде таблицы 6.3:

Таблица 6.3

i	t_i	y_i	$\frac{h}{2} f(t_i, y_i)$	$t_{i+\frac{1}{2}}$	$y_{i+\frac{1}{2}}$	$h f_{i+\frac{1}{2}}$
0	0	1	0.1	0.1	1.1	0.1836
1	0.2	1.1836	0.0850	0.3	1.2682	0.1590
2	0.4	1.3426	0.0747	0.5	1.4173	0.1424
3	0.6	1.4850	0.0677	0.7	1.5527	0.1302
4	0.8	1.6152	0.0625	0.9	1.6777	0.1210
5	1.0	1.7362				

Третий столбец таблицы 6.3 содержит приближенное решение

ния такой прямой с осью OX есть очередное приближение x_{n+1} .

Геометрическая иллюстрация метода приведена на рис. 2.10.

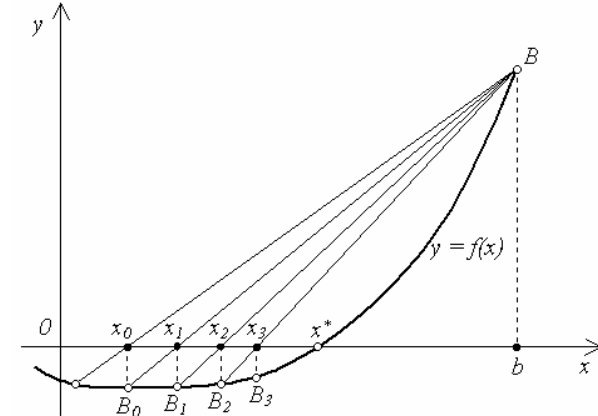


Рис. 2.10.

Прямые на этом рисунке заменяют касательные в методе Ньютона (рис. 2.8). Эта замена основана на приближенном равенстве

$$f'(x_n) \approx \frac{f(b) - f(x_n)}{b - x_n}. \quad (2.23)$$

Заменим в расчетной формуле Ньютона (2.13) производную $f'(x_n)$ правой частью приближенного равенства (2.23). В результате получим расчетную формулу метода ложного положения:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)} f(x_n). \quad (2.24)$$

Метод ложного положения обладает только линейной сходимостью. Сходимость тем выше, чем меньше отрезок $[a, b]$.

Критерий окончания. Критерий окончания итераций метода ложного положения такой же, как и для метода Ньютона. При заданной точности $\varepsilon > 0$ вычисления нужно вести до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon. \quad (2.25)$$

Пример 2.5.

Применим метод ложного положения для вычисления корня уравнения $x^3 + 2x - 11 = 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Корень этого уравнения находится на отрезке $[1, 2]$, так как

$$f(1) = -8 < 0, \quad \text{а } f(2) = 1 > 0.$$

Для ускорения сходимости возьмем более узкий отрезок $[1.9, 2]$, поскольку

$$f(1.9) < 0, \quad \text{а } f(2) > 0.$$

Вторая производная функции $f(x) = x^3 + 2x - 11$ равна $6x$. Условие

$$f(x)f''(x) \geq 0$$

выполняется для точки $b = 2$. В качестве начального приближения возьмем $x_0 = a = 1.9$. По формуле (2.24) имеем

$$x_1 = x_0 - \frac{(b - x_0)}{f(b) - f(x_0)} f(x_0) = 1.9 +$$

да Эйлера имеют второй порядок точности, т.е. $p=2$, то оценка погрешности (6.6) примет вид:

$$R \approx \frac{1}{3} |y_i^{h/2} - y_i^h|. \quad (6.15)$$

Используя правило Рунге, можно построить процедуру приближенного вычисления решения задачи Коши модифицированными методами Эйлера с заданной точностью ε . Нужно, начав вычисления с некоторого значения шага h , последовательно уменьшать это значение в два раза, каждый раз вычисляя приближенное значение $y_i^{h/2}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Вычисления прекращаются тогда, когда будет выполнено условие:

$$R \approx \frac{1}{3} |y_i^{h/2} - y_i^h| < \varepsilon. \quad (6.16)$$

Приближенным решением будут значения $y_i^{h/2}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Пример 6.2.

Применим первый модифицированный метод Эйлера для решения задачи Коши

$$y'(t) = y - \frac{2t}{y}, \quad y(0) = 1,$$

рассмотренной в примере 6.1.

Возьмем шаг $h = 0.2$. Тогда $n = \frac{1-0}{0.2} = 5$.

$$y_{i+1} = y_i + hf_{i+\frac{1}{2}}, i = 0, 1, \dots, n-1. (6.12)$$

Формулы (6.12) являются *расчетными формулами первого модифицированного метода Эйлера*.

Первый модифицированный метод Эйлера является одношаговым методом со вторым порядком точности

Второй модифицированный метод Эйлера – Коши. Суть этого метода состоит в следующем. Сначала вычисляются вспомогательные значения

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i). (6.13)$$

Затем приближения искомого решения находятся по формуле:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})], (6.14)$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Формулы (6.14) являются *расчетными формулами второго модифицированного метода Эйлера – Коши*.

Второй модифицированный метод Эйлера – Коши, так же, как и первый, является одношаговым методом со вторым порядком точности.

Оценка погрешности. Приближенная оценка погрешности модифицированных методов Эйлера осуществляется как и для простого метода Эйлера с использованием правила Рунге (см. предыдущий раздел 6.2). Так как оба модифицированных мето-

$$+ \frac{(2-1.9)}{1-(-0.341)} 0.341 \approx 1.9254.$$

Продолжая итерационный процесс, получим результаты, приведенные в табл. 2.5.

Таблица 2.5

n	x_n
0	1.9
1	1.9254
2	1.9263
3	1.9263

Тема 3. Решение систем линейных алгебраических уравнений

3.1. Постановка задачи

Требуется найти решение системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} (3.1)$$

или в матричной форме:

$$Ax = b, (3.2)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

По правилу Крамера система n линейных уравнений имеет единственное решение, если определитель системы отличен от нуля ($\det A \neq 0$) и значение каждого из неизвестных определяется следующим образом:

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, j = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

где $\det A_j$ – определитель матрицы, получаемой заменой j -го столбца матрицы A столбцом правых частей b .

Непосредственный расчет определителей для больших n является очень трудоемким по сравнению с численными методами.

Известные в настоящее время многочисленные приближенные методы решения систем линейных алгебраических уравнений распадаются на две большие группы: прямые методы и методы итераций.

Прямые методы всегда гарантируют получение решения, если оно существует, однако, для больших n требуется большое количество опера-

$$y = \sqrt{2t+1}. \quad (6.11)$$

Для сравнения точного и приближенного решений представим точное решение (6.11) в виде таблицы 6.2:

Таблица 6.2

i	0	1	2	3	4	5
t_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$y(t_i)$	1.0000	1.1832	1.3416	1.4832	1.6124	1.7320

Из таблицы видно, что погрешность составляет $R = \max_{0 \leq k \leq 5} |y(t_i) - y_i| = 0.0917$.

6.3. Модифицированные методы Эйлера

Первый модифицированный метод Эйлера. Суть этого метода состоит в следующем. Сначала вычисляются вспомогательные значения искомой функции $y_{i+\frac{1}{2}}$ в точках $t_{i+\frac{1}{2}} = t_i + \frac{h}{2}$ с помощью формулы:

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f_i = y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i).$$

Затем находится значение правой части уравнения (6.1) в средней точке

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f(t_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$$

и затем полагается

$$R \approx \frac{1}{2^p - 1} |y_i^{h/2} - y_i^h| < \varepsilon. \quad (6.8)$$

Для метода Эйлера условие (6.8) примет вид

$$R \approx |y_i^{h/2} - y_i^h| < \varepsilon. \quad (6.9)$$

Приближенным решением будут значения $y_i^{h/2}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Пример 6.1.

Найдем решение на отрезке $[0, 1]$ следующей задачи Коши:

$$y'(t) = y - \frac{2t}{y}, \quad (6.10)$$

$$y(0) = 1.$$

Возьмем шаг $h = 0.2$. Тогда $n = \frac{1-0}{0.2} = 5$.

В соответствии с (6.3) получим расчетную формулу метода Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + 0.2 \left(y_i - \frac{2t_i}{y_i} \right), y_0 = 1, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Решение представим в виде таблицы 6.1:

Таблица 6.1

i	0	1	2	3	4	5
t_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_i	1.0000	1.2000	1.3733	1.5294	1.6786	1.8237

Уравнение (6.10) есть уравнение Бернулли. Его решение можно найти в явном виде:

ций, и возникает опасность накопления погрешностей.

Этого недостатка лишены итерационные методы, но зато они не всегда сходятся и могут применяться лишь для систем определенных классов.

Среди прямых методов наиболее распространенным является метод исключения Гаусса и его модификации. Наиболее распространенными итерационными методами является метод простых итераций Якоби и метод Зейделя.

3.2. Метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса). Схема единственного деления

Основная идея метода исключений Гаусса состоит в том, что система уравнений (3.1) приводится к эквивалентной ей системе с верхней треугольной матрицей (*прямой ход исключений*), а затем неизвестные вычисляются последовательной подстановкой (*обратный ход исключений*).

Рассмотрим сначала простейший метод исключения Гаусса, называемый *схемой единственного деления*.

Прямой ход состоит из $n - 1$ шагов. На первом шаге исключается переменная x_1 из всех уравнений, кроме первого. Для этого нужно из второго, третьего, ..., n -го уравнений вычесть первое, умноженное на величину

$$m_i^1 = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, i = 2, 3, \dots, n. \quad (3.4)$$

При этом коэффициенты при x_1 обратятся в нуль во всех уравнениях, кроме первого.

Введем обозначения:

$$a_{ij}^1 = a_{ij} - m_i^1 a_{1j}, b_i^1 = b_i - m_i^1 b_1. \quad (3.5)$$

Легко убедиться, что для всех уравнений, начиная со второго, $a_{i1}^1 = 0, i = 2, 3, \dots, n$. Преобразованная система запишется в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^1x_2 + a_{23}^1x_3 + \dots + a_{2n}^1x_n = b_2^1 \\ a_{32}^1x_2 + a_{33}^1x_3 + \dots + a_{3n}^1x_n = b_3^1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n2}^1x_2 + a_{n3}^1x_3 + \dots + a_{nn}^1x_n = b_n^1 \end{cases} \quad (3.6)$$

Все уравнения (3.6), кроме первого, образуют систему $(n - 1)$ -го порядка. Применяя к ней ту же процедуру, мы можем исключить из третьего, четвертого, ..., n -го уравнений переменную x_2 . Точно так же исключаем переменную x_3 из последних $n - 3$ уравнений.

На некотором k -ом шаге в предположении, что *главный элемент k -ого шага* $a_{kk}^{k-1} \neq 0$, переменная x_k исключается с помощью формул:

$$m_i^k = \frac{a_{ik}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}},$$

рядок точности. Правило Рунге заключается в следующем. Пусть $y_i^{h/2}$ – приближения, полученные с шагом $\frac{h}{2}$, а y_i^h – приближения, полученные с шагом h . Тогда справедливо приближенное равенство:

$$|y_i^{h/2} - y(t_i)| \approx \frac{1}{2^p - 1} |y_i^{h/2} - y_i^h|. \quad (6.5)$$

Таким образом, чтобы оценить погрешность одношагового метода с шагом $\frac{h}{2}$, нужно найти то же решение с шагом h и вычислить величину, стоящую справа в формуле (6.5), т. е.

$$R \approx \frac{1}{2^p - 1} |y_i^{h/2} - y_i^h|. \quad (6.6)$$

Так как метод Эйлера имеет первый порядок точности, т. е. $p = 1$, то приближенное равенство (6.6) примет вид

$$R \approx |y_i^{h/2} - y_i^h|. \quad (6.7)$$

Используя правило Рунге, можно построить процедуру приближенного вычисления решения задачи Коши с заданной точностью ε . Нужно, начав вычисления с некоторого значения шага h , последовательно уменьшать это значение в два раза, каждый раз вычисляя приближенное значение $y_i^{h/2}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Вычисления прекращаются тогда, когда будет выполнено условие:

Геометрическая интерпретация одного шага метода Эйлера заключается в том, что решение на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ заменяется касательной

$$y = y'(t_i)(t - t_i),$$

проведенной в точке $(t_i, y(t_i))$ к интегральной кривой, проходящей через эту точку. После выполнения n шагов неизвестная интегральная кривая заменяется ломаной линией (*ломаной Эйлера*).

Оценка погрешности. Для оценки погрешности метода Эйлера воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 6.2. Пусть функция f удовлетворяет условиям:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq K, \quad \left| \frac{df}{dt} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f \right| \leq L. \quad (6.4)$$

Тогда для метода Эйлера справедлива следующая оценка погрешности:

$$R = \max_{0 \leq i \leq n} |y(t_i) - y_i| \leq \frac{l^2 L}{2n} e^{KL} = \frac{l^2 h}{2} e^{KL},$$

где l – длина отрезка $[t_0, T]$. Мы видим, что метод Эйлера имеет первый порядок точности.

Оценка погрешности метода Эйлера часто бывает затруднительна, так как требует вычисления производных функции $f(t, y(t))$. Грубую оценку погрешности дает *правило Рунге (правило двойного пересчета)*, которое используется для различных одношаговых методов, имеющих p -ый по-

$$a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} - m_i^k a_{kj}^{k-1},$$

$$b_i^k = b_i^{k-1} - m_i^k b_k^{k-1}, \quad i, j = k + 1, k + 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

Индекс k принимает значения $1, 2, \dots, n - 1$.

При $k = n - 1$ получим треугольную систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2^1 \\ a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3^2 \\ \dots \\ a_{nn}x_n = b_n^{n-1} \end{cases} \quad (3.8)$$

с треугольной матрицей A_n .

Приведение системы (3.1) к треугольному виду (3.8) составляет прямой ход метода Гаусса.

При использовании метода Гаусса нет необходимости в предварительном обосновании существования и единственности решения (т. е. доказательства, что $\det A \neq 0$). Если на k -ом шаге все элементы

$$a_{ik}^{k-1} \quad (i = k, k + 1, \dots, n)$$

окажутся равными нулю, то система (3.1) не имеет единственного решения.

Обратный ход состоит в вычислении переменных. Из последнего уравнения (3.8) определяем x_n . Подставляя его в предпоследнее уравнение, находим x_{n-1} , и т. д. Общие формулы имеют вид:

$$x_n = \frac{b_n^{n-1}}{a_{nn}^{n-1}},$$

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}^{k-1}} (b_k^{k-1} - a_{k,k+1}^{k-1} x_{k+1} - a_{k,k+2}^{k-1} x_{k+2} - \dots - a_{kn}^{k-1} x_n), \quad (3.9)$$

$$k = n - 1, n - 2, \dots, 1.$$

Трудоёмкость метода. Для реализации метода исключения Гаусса требуется примерно $2/3n^3$ операций для прямого хода и n^2 операций для обратного хода. Таким образом, общее количество операций составляет примерно $2/3n^3 + n^2$.

Пример 3.1.

Применим метод исключения Гаусса по схеме единственного деления для решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2.0x_1 + 1.0x_2 - 0.1x_3 + 1.0x_4 = 2.7 \\ 0.4x_1 + 0.5x_2 + 4.0x_3 - 8.5x_4 = 21.9 \\ 0.3x_1 - 1.0x_2 + 1.0x_3 + 5.2x_4 = -3.9 \\ 1.0x_1 + 0.2x_2 + 2.5x_3 - 1.0x_4 = 9.9 \end{cases} \quad (3.10)$$

Будем делать округление чисел до четырех знаков после десятичной точки.

Прямой ход. 1-ый шаг. Вычислим множители:

$$m_2^1 = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{0.4}{2.0} = 0.2;$$

$$m_3^1 = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{0.3}{2.0} = 0.15;$$

$h \rightarrow 0$. Говорят, что метод имеет p -ый порядок точности, если для погрешности справедлива оценка $R \leq Ch^p$, $p > 0$, C – константа, $C \neq 0$.

6.2. Метод Эйлера

Простейшим методом решения задачи Коши является метод Эйлера. Будем решать задачу Коши

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)). \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned}$$

на отрезке $[t_0, T]$. Выберем шаг $h = \frac{T-t_0}{n}$, и построим сетку с системой узлов

$$t_i = t_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

В методе Эйлера вычисляются приближенные значения функции $y(t)$ в узлах сетки:

$$y_i \approx y(t_i).$$

Заменив производную $y'(t)$ конечными разностями на отрезках

$$[t_i, t_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

получим приближенное равенство:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(t_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

которое можно переписать так:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (6.3)$$

Формулы (6.3) и начальное условие (6.2) являются *расчетными формулами метода Эйлера*.

Даже для простых дифференциальных уравнений первого порядка не всегда удается получить аналитическое решение. Поэтому большое значение имеют численные методы решения. Численные методы позволяют определить приближенные значения искомого решения $y(t)$ на некоторой выбранной сетке значений аргумента t_i , ($i = 0, 1, \dots$). Точки t_i называются *узлами сетки*, а величина $h_i = t_{i+1} - t_i$ – шагом сетки. Часто рассматривают *равномерные сетки*, для которых шаг h_i постоянен, $h_i = h = \frac{T-t_0}{n}$. При этом решение получается в виде

таблицы, в которой каждому узлу сетки t_i соответствуют приближенные значения функции $y(t)$ в узлах сетки $y_i \approx y(t_i)$.

Численные методы не позволяют найти решение в общем виде, зато они применимы к широкому классу дифференциальных уравнений.

Сходимость численных методов решения задачи Коши

Пусть $y(t)$ – решение задачи Коши. Назовем *глобальной погрешностью* (или просто *погрешностью*) численного метода функцию $\varepsilon_i = y(t_i) - y_i$, заданную в узлах сетки t_i . В качестве абсолютной погрешности примем величину $R = \max_{0 \leq i \leq n} |y(t_i) - y_i|$

Численный метод решения задачи Коши называется *сходящимся*, если для него $R \rightarrow 0$ при

$$m_4^1 = \frac{a_{41}}{a_{11}} = \frac{1.0}{2.0} = 0.5.$$

Вычитая из второго, третьего и четвертого уравнений системы (3.10) первое уравнение, умноженное соответственно на m_2^1 , m_3^1 , m_4^1 , получим новую систему:

$$\begin{cases} 2.0x_1 + 1.0x_2 - 0.1x_3 + 1.0x_4 = 2.7 \\ 0.3x_2 + 4.02x_3 - 8.70x_4 = 21.36 \\ -1.15x_2 + 1.015x_3 + 5.05x_4 = -4.305 \\ -0.30x_2 + 2.55x_3 - 1.50x_4 = 8.55 \end{cases} \quad (3.11)$$

2-ой шаг. Вычислим множители:

$$m_3^2 = \frac{a_{32}^1}{a_{22}^1} = \frac{-1.15}{0.3} = -3.83333;$$

$$m_4^2 = \frac{a_{42}^1}{a_{22}^1} = \frac{-0.30}{0.3} = -1.0.$$

Вычитая из третьего и четвертого уравнений системы (3.11) второе уравнение, умноженное соответственно на m_3^2 и m_4^2 , приходим к системе:

$$\begin{cases} 2.0x_1 + 1.0x_2 - 0.1x_3 + 1.0x_4 = 2.7 \\ 0.3x_2 + 4.02x_3 - 8.70x_4 = 21.36 \\ 16.425x_3 - 28.300x_4 = 77.575 \\ 6.570x_3 - 10.200x_4 = 29.910 \end{cases} \quad (3.12)$$

3-ий шаг. Вычислим множитель:

$$m_4^3 = \frac{a_{43}^2}{a_{33}^2} = \frac{6.570}{16.425} = 0.4.$$

Вычитая из четвертого уравнения системы (3.12) третье, умноженное на m_4^3 , приведем систему к треугольному виду:

$$\begin{cases} 2.0x_1 + 1.0x_2 - 0.1x_3 + 1.0x_4 = 2.7 \\ 0.3x_2 + 4.02x_3 - 8.70x_4 = 21.36 \\ 16.425x_3 - 28.300x_4 = 77.575 \\ 1.12x_4 = -1.12 \end{cases} \quad (3.13)$$

Обратный ход. Из последнего уравнения системы (3.13) находим $x_4 = 1.000$. Подставляя значение x_4 в третье уравнение, получим $x_3 = 2.000$. Подставляя найденные значения x_4 и x_3 во второе уравнение, найдем $x_2 = 3.000$. Наконец, из первого уравнения, подставив в него найденные значения x_4 , x_3 и x_2 , вычислим $x_1 = -1.000$.

Итак система (3.10) имеет следующее решение:

$$x_1 = 1.000, x_2 = 2.000, x_3 = 3.000, x_4 = -1.000.$$

3.3. Метод исключения Гаусса с выбором главного элемента по столбцу

Хотя метод Гаусса является точным методом, ошибки округления могут привести к существенным погрешностям результата. Кроме того, исключение по формулам (3.7) нельзя проводить, если элемент главной диагонали a_{kk}^{k-1} равен нулю.

Производную $y'(t)$ в каждой точке (t, y) можно геометрически интерпретировать как тангенс угла α наклона касательной к графику решения, проходящего через эту точку, т.е.: $k = \operatorname{tg} \alpha = f(t, y)$.

Уравнение (6.1) определяет целое семейство решений. Чтобы выделить одно решение, задают начальное условие:

$$y(t_0) = y_0, \quad (6.2)$$

где t_0 – некоторое заданное значение аргумента t , а y_0 – начальное значение функции.

Задача Коши заключается в отыскании функции $y = y(t)$, удовлетворяющей уравнению (6.1) и начальному условию (6.2). Обычно определяют решение задачи Коши на отрезке, расположенном справа от начального значения t_0 , т.е. для $t \in [t_0, T]$.

Разрешимость задачи Коши определяет следующая теорема.

Теорема 6.1. Пусть функция $f(t, y)$ определена и непрерывна при $t_0 \leq t \leq T$, $-\infty < y < \infty$ и удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

где L некоторая постоянная, а y_1, y_2 – произвольные значения.

Тогда для каждого начального значения y_0 существует единственное решение $y(t)$ задачи Коши для $t \in [t_0, T]$.

$$= \frac{1}{3}(0.74678581 - 0.74667084) \approx 4 \cdot 10^{-5}.$$

Поскольку $|\varepsilon_3| < \varepsilon$, требуемая точность достигнута и $I \approx 0.7468 \pm 0.0001$.

Тема 6. Численное решение дифференциальных уравнений

6.1. Постановка задачи Коши

Известно, что *обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка* имеет вид:

$$y'(t) = f(t, y(t)). \quad (6.1)$$

Решением уравнения (6.1) является дифференцируемая функция $y(t)$, которая при подстановке в уравнение (6.1) обращает его в тождество. На рис. 6.1 приведен график решения дифференциального уравнения (6.1). График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

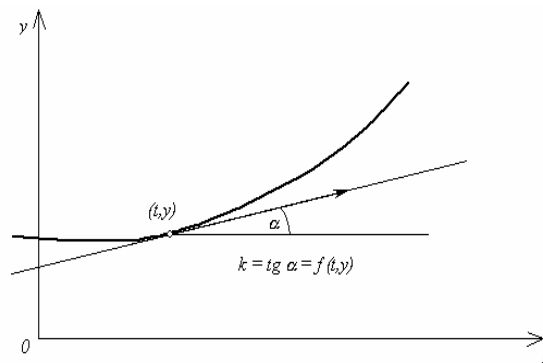


Рис. 6.1.

Если элемент a_{kk}^{k-1} мал, то велики ошибки округления при делении на этот элемент. Для уменьшения ошибок округления применяют *метод исключения Гаусса с выбором главного элемента по столбцу*. Прямой ход так же, как и для схемы единственного деления, состоит из $n - 1$ шагов. На первом шаге прежде, чем исключать переменную x_1 , уравнения переставляются так, чтобы в левом верхнем углу был наибольший по модулю коэффициент a_{i1} , $i = 1, 2, \dots, n$. В дальнейшем, на k -м шаге, прежде чем исключать переменную x_k , уравнения переставляются так, чтобы в левом верхнем углу был наибольший по модулю коэффициент a_{ik} , $i = k, k + 1, \dots, n$. После этой перестановки исключение переменной x_k производят, как в схеме единственного деления.

Трудоемкость метода. Дополнительные действия по выбору главных элементов требуют примерно n^2 операций, что практически не влияет на общую трудоемкость метода.

Пример 3.2.

Применим метод исключения Гаусса с выбором главного элемента по столбцу для решения системы уравнений (3.10) из примера 3.1.

Прямой ход. 1-ый шаг. Так как коэффициент $a_{11} = 2.0$ наибольший из коэффициентов первого столбца, перестановки строк не требуется и 1-ый

шаг полностью совпадает с 1-ым шагом примера 3.1. Из второго, третьего и четвертого уравнений исключается переменная x_1 и система приводится к виду (3.11).

2-ой шаг. Наибольший по модулю коэффициент при x_2 в системе (3.11)

$$a_{32}^1 = -1.15.$$

Поэтому переставим уравнения следующим образом:

$$\begin{cases} 2.0x_1 + 1.0x_2 - 0.1x_3 + 1.0x_4 = 2.7 \\ -1.15x_2 + 1.015x_3 + 5.05x_4 = -4.305 \\ 0.3x_2 + 4.02x_3 - 8.70x_4 = 21.36 \\ -0.30x_2 + 2.55x_3 - 1.50x_4 = 8.55 \end{cases} \quad (3.14)$$

Вычислим множители:

$$m_3^2 = \frac{a_{32}^1}{a_{22}^1} = \frac{0.3}{-1.15} = -0.26087$$

$$m_4^2 = \frac{a_{42}^1}{a_{22}^1} = \frac{-0.30}{-1.15} = 0.26087.$$

Вычитая из третьего и четвертого уравнений системы (3.14) второе уравнение, умноженное соответственно на m_3^2 и m_4^2 , приходим к системе:

$$\begin{cases} 2.0x_1 + 1.0x_2 - 0.1x_3 + 1.0x_4 = 2.7 \\ -1.15x_2 + 1.015x_3 + 5.05x_4 = -4.305 \\ 4.28478x_3 - 7.38261x_4 = 20.23696 \\ 2.28522x_3 - 2.81739x_4 = 9.67305 \end{cases} \quad (3.15)$$

$$I - I_C \approx \frac{1}{15}(I_C^{h/2} - I_C^h). \quad (5.21)$$

Используя правило Рунге, можно построить процедуру приближенного вычисления интеграла с заданной точностью ε . Нужно, начав вычисления с некоторого значения шага h , последовательно уменьшать это значения в два раза, каждый раз вычисляя приближенное значение I^h . Вычисления прекращаются тогда, когда результаты двух последующих вычислений будут различаться меньше, чем на ε .

Пример 5.4.

Найдем значение интеграла $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$, используя формулу трапеций и применяя вышеизложенную процедуру дробления шага. В примере 5.2 было получено значение I при $h_1 = 0.1$, $I^{h_1} = 0.74621079$.

Уменьшим шаг вдвое: $h_2 = 0.05$ и вычислим

$$I^{h_2} = 0.74667084, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{3}(I^{h_2} - I^{h_1}) =$$

$$= \frac{1}{3}(0.74667084 - 0.74621079) \approx 1.5 \cdot 10^{-4}.$$

Так как $|\varepsilon_2| > \varepsilon$, то снова дробим шаг: $h_3 = 0.025$, вычисляем

$$I^{h_3} = 0.74678581, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{3}(I^{h_3} - I^{h_2}) =$$

Непосредственное использование оценок погрешности (5.4), (5.8) и (5.12) неудобно, так как при этом требуется вычисление производных функции $f(x)$. В вычислительной практике используются другие оценки.

Вычтем из равенства (5.15) равенство (5.16):

$$I^{h/2} - I^h \approx \frac{1}{2^k} Ch^k(2^k - 1). \quad (5.17)$$

Учитывая приближенное равенство (5.16), получим следующее приближенное равенство:

$$I - I^{h/2} \approx \frac{I^{h/2} - I^h}{2^k - 1}. \quad (5.18)$$

Приближенное равенство (5.18) дает апостериорную оценку погрешности. Вычисление этой оценки называется *правилом Рунге*. Правило Рунге – это эмпирический способ оценки погрешности, основанный на сравнении результатов вычислений, проводимых с разными шагами h .

Для формул прямоугольников и трапеций $k = 2$, а для формулы Симпсона $k = 4$. Поэтому для этих формул приближенное равенство (5.18) принимает вид:

$$I - I_{\text{пр}} \approx \frac{1}{3} (I_{\text{пр}}^{h/2} - I_{\text{пр}}^h), \quad (5.19)$$

$$I - I_{\text{тр}} \approx \frac{1}{3} (I_{\text{тр}}^{h/2} - I_{\text{тр}}^h), \quad (5.20)$$

3-ий шаг. Вычислим множитель:

$$m_4^3 = \frac{a_{43}^2}{a_{33}^2} = \frac{2.28522}{4.16425} = 0.53333.$$

Вычитая из четвертого уравнения системы (3.15) третье, умноженное на m_4^3 , приведем систему к треугольному виду:

$$\begin{cases} 2.0x_1 + 1.0x_2 - 0.1x_3 + 1.0x_4 = 2.7 \\ -1.15x_2 + 1.015x_3 + 5.05x_4 = -4.305 \\ 4.28478x_3 - 7.38261x_4 = 20.23696 \\ 1.11998x_4 = -1.11998 \end{cases} \quad (3.16)$$

Обратный ход. Обратный ход полностью совпадает с обратным ходом примера 3.1. Решение системы имеет вид:

$$x_1 = 1.000, x_2 = 2.000, x_3 = 3.000, x_4 = -1.000.$$

3.4. Вычисление определителя методом исключения Гаусса

Из курса линейной алгебры известно, что определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов. В результате метода исключений Гаусса система линейных уравнений (3.2) с квадратной матрицей A приводится к эквивалентной ей системе (3.8) с треугольной матрицей A_n . Поэтому

$$\det A = (-1)^s \det A_n,$$

где s – число перестановок строк, ($s = 0$, если использовался метод Гаусса по схеме единственного деления). Таким образом,

$$\det A = (-1)^s a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn} . \quad (3.17)$$

Итак, для вычисления определителя $\det A$ необходимо выполнить процедуру прямого хода в методе Гаусса для системы уравнений $Ax = 0$, затем найти произведение главных элементов, стоящих на диагонали треугольной матрицы и умножить это произведение на $(-1)^s$, где s – число перестановок строк.

Пример 3.3.

Вычислим определитель

$$\det A = \begin{vmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.1 & 1.0 \\ 0.4 & 0.5 & 4.0 & 8.5 \\ 0.3 & 1.0 & 1.0 & 5.2 \\ 1.0 & 0.2 & 2.5 & 1.0 \end{vmatrix}$$

Данный определитель совпадает с определителем системы, рассмотренной в примере 3.1. Он равен произведению диагональных элементов треугольной матрицы (3.13):

$$\det A = 2.0 \cdot 0.30 \cdot 16.425 \cdot 1.12 = 11.0376.$$

Если же обратиться к примеру 3.2, то, учитывая, что была одна перестановка строк, т.е. $s = 1$, получим:

$$\det A = (-1) \cdot 2.0 \cdot (-1.15) \cdot 4.28478 \cdot 1.11998 = 11.0375.$$

Оценим погрешность полученного значения. Вычислим четвертую производную $f^{(4)}(x)$:

$$f^{(4)}(x) = (16x^4 - 48x^2 + 12) e^{-x^2}, \quad |f^{(4)}(x)| \leq 12.$$

Поэтому

$$|I - I_C| \leq \frac{12 \cdot 1}{2880} (0.1)^4 \approx 0.42 \cdot 10^{-6}.$$

Сравнивая результаты примеров 5.1, 5.2 и 5.3, видим, что метод Симпсона имеет меньшую погрешность, чем метод средних прямоугольников и метод трапеций.

5.5. Правило Рунге практической оценки погрешности

Оценки погрешности по формулам (5.4), (5.8) и (5.12) являются априорными. Они зависят от длины элементарного отрезка h , и при достаточно малом h справедливо приближенное равенство:

$$I - I^h \approx Ch^k, \quad (5.15)$$

где I^h приближенное значение интеграла, вычисленное по одной из формул (5.3), (5.5), (5.9), $C \neq 0$ и $k > 0$ – величины, не зависящие от h .

Если уменьшить шаг h в два раза, то, в соответствии с (5.15) получим:

$$I - I^{h/2} \approx \frac{1}{2^k} Ch^k \approx \frac{1}{2^k} (I - I^h). \quad (5.16)$$

$$|I - I_C| \leq \frac{M_4(b-a)}{2880} h^4, \quad (5.12)$$

где $M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

Замечание. Если число элементарных отрезков, на которые делится отрезок $[a, b]$, четно, т.е. $n = 2m$, то параболы можно проводить через узлы с целыми индексами, и вместо элементарного отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ длины h рассматривать отрезок $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ длины $2h$. Тогда формула Симпсона примет вид:

$$I \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + f(x_{2m}) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i})), \quad (5.13)$$

а вместо оценки (5.10) будет справедлива следующая оценка погрешности:

$$|I - I_C| \leq \frac{M_4(b-a)}{180} h^4, \quad (5.14)$$

Пример 5.3.

Вычислим значение интеграла $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ по формуле Симпсона (5.11) и сравним полученный результат с результатами примеров 5.1 и 5.2.

Используя таблицу значений функции e^{-x^2} из примера 5.1 и производя вычисления по формуле Симпсона (5.11), получим:

$$I_C = 0.74682418.$$

3.5. Вычисление обратной матрицы методом исключения Гаусса

Обратной матрицей к матрице A называется матрица A^{-1} , для которой выполнено соотношение:

$$A A^{-1} = E, \quad (3.18)$$

где E – единичная матрица:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$. Всякая невырожденная матрица имеет обратную матрицу.

Вычисление обратной матрицы можно свести к рассмотренной выше задаче решения системы уравнений.

Пусть A – квадратная невырожденная матрица порядка n и A^{-1} – ее обратная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Используя соотношения (3.18), (3.19) и правило умножения матриц, получим систему из n^2 уравнений с n^2 переменными x_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$. Чтобы получить первый столбец матрицы E , нужно почленно умножить каждую строку матрицы A на первый столбец матрицы A^{-1} и приравнять полученное произведение соответствующему элементу первого столбца матрицы E . В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} + \dots + a_{1n}x_{n1} = 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} + \dots + a_{2n}x_{n1} = 0 \\ a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31} + \dots + a_{3n}x_{n1} = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_{11} + a_{n2}x_{21} + a_{n3}x_{31} + \dots + a_{nn}x_{n1} = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Аналогично, чтобы получить второй столбец матрицы E , нужно почленно умножить каждую строку матрицы A на второй столбец матрицы A^{-1} и приравнять полученное произведение соответствующему элементу второго столбца матрицы E . В результате получим систему уравнений:

$$y = L_2(x) = f(x'_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}(x - x'_i) + \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x'_i) + f(x_i))}{h^2/2}(x - x'_i)^2, \quad (5.9)$$

где $h = \frac{b-a}{n}$.

Проинтегрировав функцию (5.9) на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, получим:

$$\begin{aligned} I_i &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_2(x)dx = \\ &= \frac{h}{6}(f(x_i) + 4f(x'_i) + f(x_{i+1})). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Суммируя выражение (5.10) по $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, получим *квадратурную формулу Симпсона (или формулу парабол)*:

$$\begin{aligned} I = \int_a^b f(x)dx \approx I_C &= \frac{h}{6}(f(x_0) + f(x_n) + \\ &+ 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x'_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Оценка погрешности. Для оценки погрешности формулы Симпсона воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 5.2. Пусть функция f имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную четвертого порядка $f^{(4)}(x)$. Тогда для формулы Симпсона (5.9) справедлива следующая оценка погрешности:

формуле трапеций (5.7) и сравним полученный результат с результатом примера 5.1.

Используя таблицу значений функции e^{-x^2} из примера 5.1 и производя вычисления по формуле трапеций (5.7), получим:

$$I_{\text{тр}} = 0.74621079.$$

Оценим погрешность полученного значения. В примере (5.1) получили оценку: $|f''(x)| \leq M_2 = 2$. Поэтому по формуле (5.8)

$$|I - I_{\text{тр}}| \leq \frac{2 \cdot 1}{12} (0.1)^2 \approx 1.7 \cdot 10^{-3}.$$

Сравнивая результаты примеров 5.1 и 5.2, видим, что метод средних прямоугольников имеет меньшую погрешность, т.е. он более точный.

5.4. Метод Симпсона (метод парабол)

Заменяем график функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 2, \dots, n-1$, параболой, проведенной через точки

$$(x_i, f(x_i)), (x'_i, f(x'_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1})),$$

где x'_i – середина отрезка $[x_i, x_{i+1}]$. Эта парабола есть интерполяционный многочлен второй степени $L_2(x)$ с узлами x_i, x'_i, x_{i+1} . Нетрудно убедиться, что уравнение этой параболы имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + a_{13}x_{32} + \dots + a_{1n}x_{n2} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{32} + \dots + a_{2n}x_{n2} = 1 \\ a_{31}x_{12} + a_{32}x_{22} + a_{33}x_{32} + \dots + a_{3n}x_{n2} = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_{12} + a_{n2}x_{22} + a_{n3}x_{32} + \dots + a_{nn}x_{n2} = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

и т. д.

Всего, таким образом, получим n систем по n уравнений в каждой системе, причем все эти системы имеют одну и ту же матрицу A и отличаются только свободными членами. Приведение матрицы A к треугольной по формулам (3.7) делается при этом только один раз. Затем по последней из формул (3.7) преобразуются все правые части, и для каждой правой части делается обратный ход.

Пример 3.4.

Вычислим обратную матрицу A^{-1} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1.8 & -3.8 & 0.7 & -3.7 \\ 0.7 & 2.1 & -2.6 & -2.8 \\ 7.3 & 8.1 & 1.7 & -4.9 \\ 1.9 & -4.3 & -4.3 & -4.7 \end{pmatrix}$$

По формулам (3.7) за три шага прямого хода преобразуем матрицу A в треугольную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1.8 & -3.8 & 0.7 & -3.7 \\ 0 & 3.57778 & -2.87222 & -1.36111 \\ 0 & 0 & 17.73577 & 19.04992 \\ 0 & 0 & 0 & 5.40155 \end{pmatrix}$$

Далее, применим процедуру обратного хода четыре раза для столбцов свободных членов, преобразованных по формулам (3.7) из столбцов единичной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Каждый раз будем получать столбцы матрицы A^{-1} . Опустив промежуточные вычисления, приведем окончательный вид обратной матрицы:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.21121 & -0.46003 & 0.16248 & 0.26956 \\ -0.03533 & 0.16873 & 0.01573 & -0.08920 \\ 0.23030 & 0.04607 & -0.00944 & -0.19885 \\ -0.29316 & -0.38837 & 0.06128 & 0.18513 \end{pmatrix}$$

3.6. Метод простой итерации Якоби

Метод Гаусса обладает довольно сложной вычислительной схемой. Кроме того, при вычислениях накапливается ошибка округления, что

составленной из трапеций. Так как площадь трапеции, построенной на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ длины $h = \frac{b-a}{n}$, равна $h \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$, то, пользуясь этой формулой для $i = 0, 2, \dots, n-1$, получим *квадратурную формулу трапеций*:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx \approx I_{\text{тр}} = \\ &= h \left(\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \right) = \\ &= \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Оценка погрешности. Для оценки погрешности формулы трапеций воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 5.2. Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда для формулы трапеций справедлива следующая оценка погрешности:

$$|I - I_{\text{тр}}| \leq \frac{M_2(b-a)}{12} h^2, \quad (5.8)$$

где $M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$.

Пример 5.2.

Вычислим значение интеграла $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ по

Оценим погрешность полученного значения. Имеем:

$$f''(x) = (e^{-x^2})'' = (4x^2 - 2) e^{-x^2}.$$

Нетрудно убедиться, что $|f''(x)| \leq M_2 = 2$. Поэтому по формуле(5.4)

$$|I - I_{\text{пр}}| \leq \frac{2 \cdot 1}{24} (0.1)^2 \approx 0.84 \cdot 10^{-3}.$$

5.3. Метод трапеций

Выведем формулу трапеций так же, как и формулу прямоугольников, из геометрических соображений. Заменим график функции $y = f(x)$ (рис.5.1) ломаной линией (рис.5.7), полученной следующим образом. Из точек $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ проведем ординаты до пересечения с кривой $y = f(x)$. Концы ординат соединим прямолинейными отрезками.

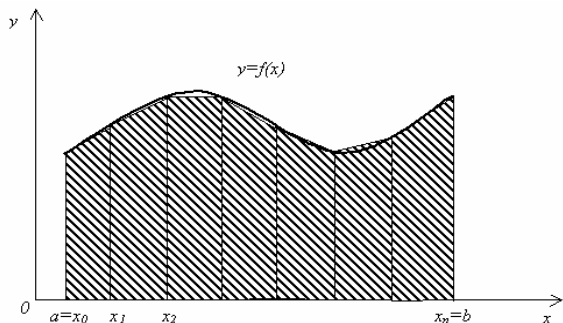


Рис. 5.7.

Тогда площадь криволинейной трапеции приближенно можно считать равной площади фигуры,

может привести к недостаточно точному результату. Рассмотрим метод простой итерации Якоби, свободный от этих недостатков, хотя требующий приведения исходной системы уравнений к специальному виду.

Для того чтобы применить метод простой итерации, необходимо систему уравнений

$$Ax = b \quad (3.22)$$

с квадратной невырожденной матрицей A привести к виду

$$x = Bx + c, \quad (3.23)$$

где B – квадратная невырожденная матрица с элементами $b_{ij}, i, j=1, 2, \dots, n$, x – вектор-столбец неизвестных x_i , c – вектор-столбец с элементами $c_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Существуют различные способы приведения системы (3.22) к виду (3.23). Рассмотрим самый простой. Представим систему (3.22) в развернутом виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (3.24)$$

Из первого уравнения системы (3.24) выразим неизвестную x_1 :

$$x_1 = a_{11}^{-1}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n),$$

из второго уравнения – неизвестную x_2 :

$$x_2 = a_{22}^{-1}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n),$$

и т. д. В результате получим систему:

$$\begin{cases} x_1 = b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \dots + b_{1,n-1}x_{n-1} + b_{1n}x_n + c_1 \\ x_2 = b_{21}x_1 + b_{23}x_3 + \dots + b_{2,n-1}x_{n-1} + b_{2n}x_n + c_2 \\ x_3 = b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + \dots + b_{3,n-1}x_{n-1} + b_{3n}x_n + c_3 \\ \dots \\ x_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + b_{n3}x_3 + \dots + b_{n,n-1}x_{n-1} + c_n \end{cases} \quad (3.25)$$

Матричная запись системы (3.25) имеет вид (3.23). На главной диагонали матрицы \mathbf{B} находятся нулевые элементы, а остальные элементы вычисляются по формулам:

$$b_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, c_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j \quad (3.26)$$

Очевидно, что диагональные элементы матрицы \mathbf{A} должны быть отличны от нуля.

Выберем произвольно начальное приближение. Обычно в качестве первого приближения берут $x_i^0 = c_i$ или $x_i^0 = 0$. Подставим начальное приближение в правую часть (3.25). Вычисляя левые части, получим значения $x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1$. Продолжая этот процесс дальше, получим последовательность приближений, причем $(k + 1)$ -е приближение строится следующим образом:

$$|I - I_{\text{пр}}| \leq \frac{M_2(b-a)}{24} h^2, \quad (5.6)$$

где $M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$

Пример 5.1.

Вычислим значение интеграла $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ по формуле средних прямоугольников (5.3) с шагом $h = 0.1$.

Составим таблицу значений функции e^{-x^2} (табл. 5.1):

Таблица 5.1

x	e^{-x^2}	x	e^{-x^2}
0.00	1.0000000	0.55	0.7389685
0.05	0.9975031	0.60	0.6976763
0.10	0.9900498	0.65	0.6554063
0.15	0.9777512	0.70	0.6126264
0.20	0.9607894	0.75	0.5697828
0.25	0.9394131	0.80	0.5272924
0.30	0.9139312	0.85	0.4855369
0.35	0.8847059	0.90	0.4448581
0.40	0.8521438	0.95	0.4055545
0.45	0.8166865	1.00	0.3678794
0.50	0.7788008		

Производя вычисления по формуле (5.3), получим:

$$I_{\text{пр}} = 0.74713088.$$

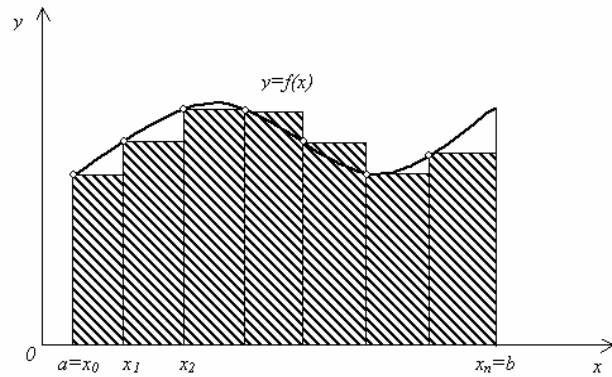


Рис. 5.5.

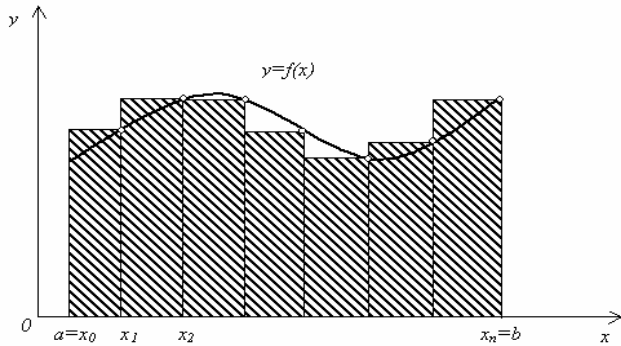


Рис. 5.6.

Оценка погрешности. Для оценки погрешности формулы прямоугольников воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 5.1. Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда для формулы прямоугольников справедлива следующая оценка погрешности:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = b_{12}x_2^k + b_{13}x_3^k + \dots + b_{1n-1}x_{n-1}^k + b_{1n}x_n^k + c_1 \\ x_2^{k+1} = b_{21}x_1^k + b_{23}x_3^k + \dots + b_{2n-1}x_{n-1}^k + b_{2n}x_n^k + c_2 \\ x_3^{k+1} = b_{31}x_1^k + b_{32}x_2^k + \dots + b_{3n-1}x_{n-1}^k + b_{3n}x_n^k + c_3 \\ \dots \\ x_n^{k+1} = b_{n1}x_1^k + b_{n2}x_2^k + b_{n3}x_3^k + \dots + b_{nn-1}x_{n-1}^k + c_n \end{cases} \quad (3.27)$$

Система (3.27) представляет собой *расчетные формулы метода простой итерации Якоби*.

Сходимость метода простой итерации. Известно следующее *достаточное* условие сходимости метода простой итерации Якоби.

Если элементы матрицы A удовлетворяют условию:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.28)$$

то итерационная последовательность x^k сходится к точному решению x^* .

Условие (3.28) называют условием преобладания диагональных элементов матрицы A , так как оно означает, что модуль диагонального элемента i -ой строки больше суммы модулей остальных элементов этой строки, $i = 1, 2, \dots, n$.

Необходимо помнить, что условие сходимости (3.28) является лишь достаточным. Его выполнение гарантирует сходимость метода простых итераций, но его невыполнение, вообще говоря, не означает, что метод расходится.

Справедлива следующая апостериорная оценка погрешности:

$$\max |x_i^* - x_i^k| \leq \frac{\beta}{1-\beta} \max |x_i^{k+1} - x_i^k|, \quad (3.29)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

где $\beta = \max |b_{ij}|$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Правую часть оценки (3.29) легко вычислить после нахождения очередного приближения.

Критерий окончания. Если требуется найти решение с точностью ε , то в силу (3.29) итерационный процесс следует закончить, как только на $(k+1)$ -ом шаге выполнится неравенство:

$$\frac{\beta}{1-\beta} \max |x_i^{k+1} - x_i^k| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.30)$$

Поэтому в качестве критерия окончания итерационного процесса можно использовать неравенство

$$\max |x_i^{k+1} - x_i^k| < \varepsilon_1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.31)$$

где $\varepsilon_1 = \frac{1-\beta}{\beta} \varepsilon$.

Если выполняется условие $\beta \leq \frac{1}{2}$, то можно пользоваться более простым критерием окончания:

$$\max |x_i^{k+1} - x_i^k| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.32)$$

В других случаях использование критерия (3.32) неправомерно и может привести к преждевременному окончанию итерационного процесса.

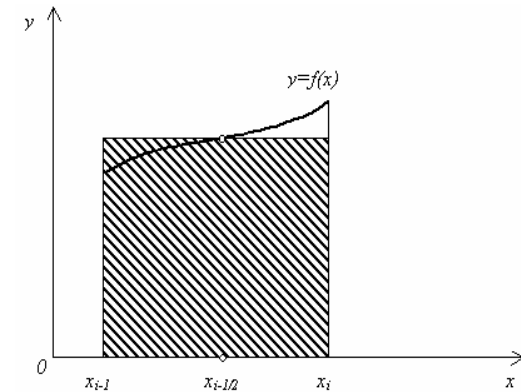


Рис. 5.4.

Тогда получим *квадратурную формулу средних прямоугольников*:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx I_{np} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right). \quad (5.3)$$

Формулу (5.3) называют также *формулой средних прямоугольников*.

Иногда используют формулы

$$I \approx I_{np}^n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), \quad (5.4)$$

$$I \approx I_{np}^n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad (5.5)$$

которые называют соответственно *квадратурными формулами левых и правых прямоугольников*. Геометрические иллюстрации этих формул приведены на рис. 5.5 и 5.6.

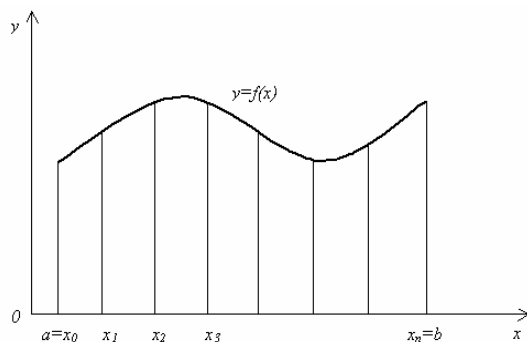


Рис. 5.2.

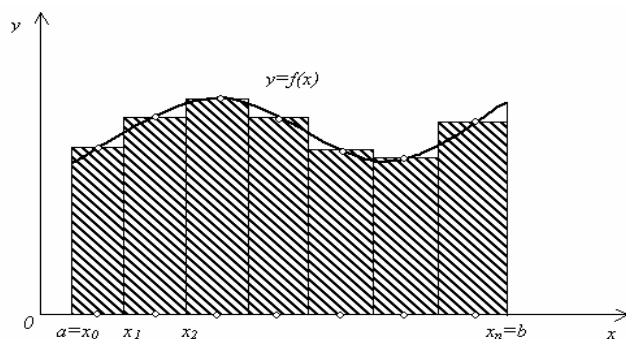


Рис. 5.3.

Эта фигура состоит из n прямоугольников. Основание i -го прямоугольника образует отрезок $[x_i, x_{i+1}]$ длины h , а высота основания равна значению функции в середине отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, т. е. $f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$ (рис. 5.4).

Пример 3.5.

Применим метод простой итерации Якоби для решения системы уравнений

$$\begin{cases} 20.9x_1 + 1.2x_2 + 2.1x_3 + 0.9x_4 = 21.70 \\ 1.2x_1 + 21.2x_2 + 1.5x_3 + 2.5x_4 = 27.46 \\ 2.1x_1 + 1.5x_2 + 19.8x_3 + 1.3x_4 = 28.76 \\ 0.9x_1 + 2.5x_2 + 1.3x_3 + 32.1x_4 = 49.72 \end{cases} \quad (3.33)$$

Заметим, что метод простой итерации сходится, т. к. выполняется условие преобладания диагональных элементов (3.28):

$$\begin{aligned} |20.9| &> |1.2| + |2.1| + |0.9|, \\ |21.2| &> |1.2| + |1.5| + |2.5|, \\ |19.8| &> |2.1| + |1.5| + |1.3|, \\ |32.1| &> |0.9| + |2.5| + |1.3|. \end{aligned}$$

Пусть требуемая точность $\varepsilon = 10^{-3}$. Вычисления будем проводить с четырьмя знаками после десятичной точки.

Приведем систему к виду (3.25):

$$\begin{cases} x_1 = -0.0574x_2 - 0.1005x_3 - 0.0431x_4 + 1.0383 \\ x_2 = -0.0566x_1 - 0.0708x_3 - 0.1179x_4 + 1.2953 \\ x_3 = -0.1061x_1 - 0.0758x_2 - 0.0657x_4 + 1.4525 \\ x_4 = -0.0280x_1 - 0.0779x_2 - 0.0405x_3 + 1.5489 \end{cases} \quad (3.34)$$

Величина $\beta = \max |b_{ij}|$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ равна 0.1179, т. е. выполняется условие $\beta \leq \frac{1}{2}$, и можно пользоваться критерием окончания итерационного процесса (3.32).

В качестве начального приближения возьмем элементы столбца свободных членов:

$$\begin{aligned} x_1^0 &= 1.0383, x_2^0 = 1.2953, \\ x_3^0 &= 1.4525, x_4^0 = 1.5489. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Вычисления будем вести до тех пор, пока все величины

$$|x_i^{k+1} - x_i^k|, i = 1, 2, 3, 4,$$

а следовательно, и $\max|x_i^{k+1} - x_i^k|$ не станут меньше $\varepsilon = 10^{-3}$.

Последовательно вычисляем:

при $k = 1$

$$\begin{aligned} x_1^1 &= -0.0574x_2^0 - 0.1005x_3^0 - \\ &\quad - 0.0431x_4^0 + 1.0383 = 0.7512 \\ x_2^1 &= -0.0566x_1^0 - 0.0708x_3^0 - \\ &\quad - 0.1179x_4^0 + 1.2953 = 0.9511 \\ x_3^1 &= -0.1061x_1^0 - 0.0758x_2^0 - \\ &\quad - 0.0657x_4^0 + 1.4525 = 1.1423 \\ x_4^1 &= -0.0280x_1^0 - 0.0779x_2^0 - \\ &\quad - 0.0405x_3^0 + 1.5489 = 1.3601 \end{aligned}$$

при $k = 2$

$$\begin{aligned} x_1^2 &= 0.8106, x_2^2 = 1.0118, \\ x_3^2 &= 1.2117, x_4^2 = 1.4077. \end{aligned}$$

при $k = 3$

$$\begin{aligned} x_1^3 &= 0.7978, x_2^3 = 0.9977, \\ x_3^3 &= 1.1975, x_4^3 = 1.3983. \end{aligned}$$

графиком функции $y = f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 5.1).

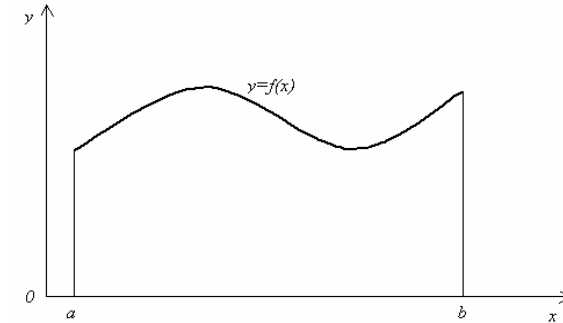


Рис. 5.1.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей длиной h , так, что

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

При этом получим точки

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

и $x_{i+1} = x_i + h, i = 0, 1, \dots, n-1$ (рис. 5.2)

Заменим приближенно площадь криволинейной трапеции площадью ступенчатой фигуры, изображенной на рис. 5.3.

сложной для вычислений. Кроме того, точное значение интеграла по формуле (5.1) нельзя получить, если функция $f(x)$ задается таблицей. В этих случаях обращаются к методам численного интегрирования.

Суть численного интегрирования заключается в том, что подынтегральную функцию $f(x)$ заменяют другой приближенной функцией, так, чтобы, во-первых, она была близка к $f(x)$ и, во-вторых, интеграл от нее легко вычислялся. Например, можно заменить подынтегральную функцию интерполяционным многочленом. Широко используют *квадратурные формулы*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i), \quad (5.2)$$

где x_i – некоторые точки на отрезке $[a, b]$, называемые *узлами квадратурной формулы*, A_i – числовые коэффициенты, называемые *весами квадратурной формулы*, $n \geq 0$ – целое число.

5.2. Метод средних прямоугольников

Формулу прямоугольников можно получить из геометрической интерпретации интеграла. Будем интерпретировать интеграл $\int_a^b f(x)dx$ как площадь криволинейной трапеции, ограниченной

при $k = 4$

$$x_1^4 = 0.8004, x_2^4 = 1.0005, \\ x_3^4 = 1.2005, x_4^4 = 1.4003.$$

Вычисляем модули разностей значений x_i^k при $k = 3$ и $k = 4$:

$$|x_1^4 - x_1^3| = 0.026, \quad |x_2^4 - x_2^3| = 0.028, \\ |x_3^4 - x_3^3| = 0.0030, \quad |x_4^4 - x_4^3| = 0.0020,$$

так как все они больше заданной точности $\varepsilon = 10^{-3}$, продолжаем итерации:

при $k = 5$

$$x_1^5 = 0.7999, x_2^5 = 0.9999, \\ x_3^5 = 1.1999, x_4^5 = 1.3999.$$

Вычисляем модули разностей значений x_i^k при $k = 4$ и $k = 5$:

$$|x_1^5 - x_1^4| = 0.0005, \quad |x_2^5 - x_2^4| = 0.0006, \\ |x_3^5 - x_3^4| = 0.0006, \quad |x_4^5 - x_4^4| = 0.0004.$$

Все они меньше заданной точности $\varepsilon = 10^{-3}$, поэтому итерации заканчиваем. Приближенным решением системы являются следующие значения:

$$x_1 \approx 0.7999, x_2 \approx 0.9999, \\ x_3 \approx 1.1999, x_4 \approx 1.3999.$$

Для сравнения приведем точные значения переменных:

$$x_1 = 0.8, x_2 = 1.0, \\ x_3 = 1.2, x_4 = 1.4.$$

Система уравнений для определения коэффициентов a_0 и a_1 многочлена первой степени

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

имеет вид

$$\begin{cases} 5a_0 + 15a_1 = 12, \\ 15a_0 + 55a_1 = 53. \end{cases}$$

По формулам (4.30) найдем коэффициенты a_0 и a_1 :

$$a_0 = \frac{b_0c_2 - b_1c_1}{c_0c_2 - c_1^2} \approx -2.7, \quad a_1 = \frac{b_1c_0 - b_0c_1}{c_0c_2 - c_1^2} \approx 1.7.$$

$$P_1(x) = a_0 + a_1x = -2.7 + 1.7x.$$

2. Квадратичная аппроксимация ($m=2$).

Система уравнений для определения коэффициентов a_0 , a_1 и a_2 многочлена второй степени

$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ имеет вид

$$\begin{cases} 5a_0 + 15a_1 + 55a_2 = 12 \\ 15a_0 + 55a_1 + 225a_2 = 53 \\ 55a_0 + 225a_1 + 979a_2 = 235. \end{cases}$$

По формулам (4.38) найдем коэффициенты a_0 , a_1 и a_2 :

$$a_0 \approx -2.20, \quad a_1 \approx 1.27, \quad a_2 \approx 0.07.$$

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 = -2.20 + 1.27x + 0.07x^2.$$

Сравним значения, рассчитанные для функциональной зависимости, с исходными данными. Результаты приведены в табл.4.4.

Таблица 4.4

i	0	1	2	3	4
-----	---	---	---	---	---

Матричная запись расчетных формул (3.36) имеет вид:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{B}_1\mathbf{x}^{k+1} + \mathbf{B}_2\mathbf{x}^k + \mathbf{c}. \quad (3.37)$$

Так как $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$, точное решение \mathbf{x}^* исходной системы удовлетворяет равенству:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{B}_1\mathbf{x}^* + \mathbf{B}_2\mathbf{x}^* + \mathbf{c}. \quad (3.38)$$

Сходимость метода Зейделя. Достаточным условием сходимости метода Зейделя является выполнение неравенства:

$$\beta = \max |b_{ij}| < 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.39)$$

Неравенство (3.39) означает, что для сходимости метода Зейделя достаточно, чтобы максимальный по модулю элемент матрицы \mathbf{B} был меньше единицы.

Если выполнено условие (3.39), то справедлива следующая апостериорная оценка погрешности:

$$\max |x_i^* - x_i^k| \leq \frac{\beta_2}{1 - \beta} \max |x_i^{k+1} - x_i^k| \quad (3.40)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

где β – максимальный элемент матрицы \mathbf{B} , β_2 – максимальный элемент матрицы \mathbf{B}_2 .

Правую часть оценки (3.40) легко вычислить после нахождения очередного приближения.

Критерий окончания. Если требуется найти решение с точностью ε , то в силу (3.37) итерационный

процесс следует закончить, как только на $(k+1)$ -ом шаге выполнится неравенство:

$$\frac{\beta_2}{1-\beta} \max |x_i^{k+1} - x_i^k| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.41)$$

Поэтому в качестве критерия окончания итерационного процесса можно использовать неравенство

$$\max |x_i^{k+1} - x_i^k| < \varepsilon_1, i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.42)$$

где $\varepsilon_1 = \frac{1-\beta}{\beta_2} \varepsilon$.

Если выполняется условие $\beta \leq \frac{1}{2}$, то можно пользоваться более простым критерием окончания:

$$\max |x_i^{k+1} - x_i^k| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.43)$$

Метод Зейделя, как правило, сходится быстрее, чем метод Якоби. Однако возможны ситуации, когда метод Якоби сходится, а метод Зейделя сходится медленнее или вообще расходится.

Пример 3.6.

Применим метод Зейделя для решения системы уравнений (3.33) из примера 3.5. Первые шаги полностью совпадают с процедурой решения по методу Якоби, а именно: система приводится к виду (3.34), затем в качестве начального приближения выбираются элементы столбца свободных членов (3.35). Проведем теперь итерации методом Зейделя:

Шаг 3. Вычислить $|C|$, $|C_1|$, $|C_2|$, $|C_3|$ по формулам (4.34) – (4.37).

Шаг 4. Вычислить a_0 , a_1 , a_2 по формулам (4.38).

Шаг 5. Вычислить величину погрешности

$$\Delta_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} (y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2))^2}. \quad (4.39)$$

Шаг 6. Вывести на экран результаты : аппроксимирующую квадратичную функцию

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

и величину погрешности Δ_2 .

Пример 4.6.

Построим по методу наименьших квадратов многочлены первой и второй степени и оценим степень приближения. Значения y_i в точках x_i , $i=0, 1, 2, 3, 4$ приведены в таблице 2.3.

Таблица 4.3

i	0	1	2	3	4
x_i	1	2	3	4	5
y_i	-1	1	2	4	6

Вычислим коэффициенты $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, b_0, b_1, b_2$, по формулам (4.32), (4.33):

$$c_0 = 5; c_1 = 15; c_2 = 55;$$

$$c_3 = 225; c_4 = 979;$$

$$b_0 = 12; b_1 = 53; b_2 = 235.$$

1. *Линейная аппроксимация ($m=1$).*

где $|C|$ – определитель матрицы C , а $|C_i|$ – определитель матрицы C_i , полученной из матрицы C заменой i -го столбца столбцом свободных членов b .

$$|C| = c_0 c_2 c_4 + 2c_1 c_2 c_3 - c_2^3 - c_1^2 c_4 - c_3^2 c_0. \quad (4.34)$$

$$|C_1| = \begin{vmatrix} b_0 & c_1 & c_2 \\ b_1 & c_2 & c_3 \\ b_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = b_0 c_2 c_4 + b_2 c_1 c_3 + b_1 c_2 c_3 - b_2 c_2^2 - b_1 c_1 c_4 - b_0 c_3^2. \quad (4.35)$$

$$|C_2| = \begin{vmatrix} c_0 & b_0 & c_2 \\ c_1 & b_1 & c_3 \\ c_2 & b_2 & c_4 \end{vmatrix} = b_1 c_0 c_4 + b_0 c_2 c_3 + b_2 c_1 c_2 - b_1 c_2^2 - b_0 c_1 c_4 - b_2 c_0 c_3. \quad (4.36)$$

$$|C_3| = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & b_0 \\ c_1 & c_2 & b_1 \\ c_2 & c_3 & b_2 \end{vmatrix} = b_2 c_0 c_2 + b_1 c_1 c_2 + b_0 c_1 c_3 - b_0 c_2^2 - b_2 c_1^2 - b_1 c_0 c_3. \quad (4.37)$$

$$a_0 = \frac{|C_1|}{|C|}, a_1 = \frac{|C_2|}{|C|}, a_2 = \frac{|C_3|}{|C|}. \quad (4.38)$$

Алгоритм 4.2.

(Алгоритм метода наименьших квадратов.

Квадратичная аппроксимация)

Шаг 1. Ввести исходные данные:

$$x_i, y_i, i=0, 1, 2, \dots, n.$$

Шаг 2. Вычислить коэффициенты $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, b_0, b_1, b_2$, по формулам (4.32), (4.33).

при $k = 1$

$$x_1^1 = -0.0574x_2^0 - 0.1005x_3^0 - 0.0431x_4^0 + 1.0383 = 0.7512,$$

при вычислении x_2^1 используем уже полученное значение x_1^1 :

$$x_2^1 = -0.0566x_1^1 - 0.0708x_3^0 - 0.1179x_4^0 + 1.2953 = 0.9674,$$

при вычислении x_3^1 используем уже полученные значения x_1^1 и x_2^1 :

$$x_3^1 = -0.1061x_1^1 - 0.0758x_2^1 - 0.0657x_4^0 + 1.4525 = 1.1977,$$

при вычислении x_4^1 используем уже полученные значения x_1^1, x_2^1, x_3^1 :

$$x_4^1 = -0.0280x_1^1 - 0.0779x_2^1 - 0.0405x_3^1 + 1.5489 = 1.4037$$

Аналогичным образом проведем вычисления при $k = 2$ и $k = 3$. Получим:

при $k = 2$

$$x_1^2 = 0.8019, x_2^2 = 0.9996, \\ x_3^2 = 1.9996, x_4^2 = 1.4000.$$

при $k = 3$

$$x_1^3 = 0.80006, x_2^3 = 1.00002, \\ x_3^3 = 1.19999, x_4^3 = 1.40000.$$

Известны точные значения переменных:

$$x_1 = 0.8, x_2 = 1.0,$$

$$x_3 = 1.2, x_4 = 1.4.$$

Сравнение с примером 3.5 показывает, что метод Зейделя сходится быстрее и дает более точный результат.

Тема 4. Приближение функций

4.1. Постановка задачи

Задача приближения (аппроксимации) функций заключается в том, чтобы для данной функции построить другую, отличную от нее функцию, значения которой достаточно близки к значениям данной функции. Укажем наиболее типичные случаи:

1. функция задана таблицей в конечном множестве точек, а вычисления нужно произвести в других точках;
2. функция задана аналитически, но ее вычисление по формуле затруднительно;

При решении задачи поиска приближенной функции возникают следующие проблемы:

1. необходимо выбрать вид приближенной функции (для приближения широко используются многочлены, тригонометрические функции, показательные функции и т.д.);
2. необходимо выбрать критерий близости исходной и приближенной функции (это может быть требование совпадения обеих функций в узловых точках (задача интерполяции), минимиза-

Шаг 4. Вычислить величину погрешности

$$\Delta_1 = \sqrt{\sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} (y_i - (a_0 + a_1 x_i))^2}. \quad (4.31)$$

Шаг 5. Вывести на экран результаты: аппроксимирующую линейную функцию $P_1(x) = a_0 + a_1 x$ и величину погрешности Δ_1 .

2. *Квадратичная аппроксимация ($m = 2$).*

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

$$c_0 = \sum_{i=0}^n x_i^0 = n+1; c_1 = \sum_{i=0}^n x_i^1 = \sum_{i=0}^n x_i; \\ c_2 = \sum_{i=0}^n x_i^2; c_3 = \sum_{i=0}^n x_i^3; c_4 = \sum_{i=0}^n x_i^4. \quad (4.32)$$

$$b_0 = \sum_{i=0}^n y_i x_i^0 = \sum_{i=0}^n y_i; b_1 = \sum_{i=0}^n y_i x_i^1 = \sum_{i=0}^n y_i x_i;$$

$$b_2 = \sum_{i=0}^n y_i x_i^2. \quad (4.33)$$

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

$$b = (b_0, b_1, b_2)^T.$$

Решение системы уравнений $Ca = b$ найдем по правилу Крамера:

$$a_i = \frac{|C_i|}{|C|}, i = 0, 1,$$

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 & \sum_0^n x_i \\ \sum_0^n x_i & \sum_0^n x_i^2 \end{pmatrix}$$

$$b = (b_0, b_1)^T = \left(\sum_{i=0}^n y_i, \sum_{i=0}^n y_i x_i \right)^T.$$

Решение системы уравнений $Ca = b$ найдем по правилу Крамера:

$$a_0 = \frac{|C_1|}{|C|}, \quad a_1 = \frac{|C_2|}{|C|},$$

где $|C|$ – определитель матрицы C , а $|C_i|$ – определитель матрицы C_i , полученной из матрицы C заменой i -го столбца столбцом свободных членов b , $i = 1, 2$.

Таким образом,

$$a_0 = \frac{b_0 c_2 - b_1 c_1}{c_0 c_2 - c_1^2}, \quad a_1 = \frac{b_1 c_0 - b_0 c_1}{c_0 c_2 - c_1^2}. \quad (4.30)$$

Алгоритм 4.1.

(Алгоритм метода наименьших квадратов.
Линейная аппроксимация)

Шаг 1. Ввести исходные данные:

$$x_i, y_i, \quad i=0, 1, 2, \dots, n.$$

Шаг 2. Вычислить коэффициенты c_0, c_1, b_0, b_1 по формулам (4.28), (4.29).

Шаг 3. Вычислить a_0, a_1 по формулам (4.30).

ция среднеквадратического уклонения (метод наименьших квадратов) и др.);

3. Необходимо указать правило (алгоритм), позволяющее с заданной точностью найти приближение функции.

4.2. Приближение функции многочленами Тейлора

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки a и имеет в этой окрестности $n + 1$ производную. Тогда в этой окрестности справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + R_n(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

$$\text{где } c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

$T_n(x)$ – многочлен Тейлора:

$$T_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n, \quad (4.1)$$

$R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора, его можно записать различными способами, например, в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad a \leq \xi \leq x.$$

Многочлен Тейлора (4.1) обладает свойством, что в точке $x = a$ все его производные до порядка n

включительно совпадают с соответствующими производными функции f , т. е.

$$T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

В этом легко убедиться, дифференцируя $T_n(x)$. Благодаря этому свойству многочлен Тейлора хорошо приближает функцию f в окрестности точки a . Погрешность приближения составляет

$$|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)|,$$

т. е. задавая некоторую точность $\varepsilon > 0$, можно определить окрестность точки a и значение n из условия:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right| < \varepsilon. \quad (4.2)$$

Пример 4.1.

Найдем приближение функции $y = \sin x$ многочленом Тейлора в окрестности точки $a = 0$. Воспользуемся известным выражением для k -ой производной функции $\sin x$:

$$(\sin x)^{(k)} = \sin \left[x + k \frac{\pi}{2} \right] \quad (4.3)$$

Применяя последовательно формулу (4.3), получим:

$$f(0) = \sin 0 = 0;$$

$$f'(0) = \cos 0 = 1;$$

$$f''(0) = -\sin 0 = 0;$$

.....

$$f^{(2k-1)}(0) = \sin (2k-1) \frac{\pi}{2} = (-1)^{k-1};$$

$$c_m a_0 + c_{m+1} a_1 + c_{m+2} a_2 + \dots + c_{2m} a_m = b_m$$

Матричная запись системы (4.25) имеет следующий вид:

$$Ca = b. \quad (4.26)$$

Для определения коэффициентов a_k , $k = 0, 1, \dots, m$, и, следовательно, искомого многочлена (4.21) необходимо вычислить суммы c_k , b_k и решить систему уравнений (4.25). Матрица C системы (4.26) называется матрицей Грама и является симметричной и положительно определенной. Эти полезные свойства используются при решении.

Погрешность приближения в соответствии с формулой (4.20) составит

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (y_i - P_m(x_i))^2}. \quad (4.27)$$

Рассмотрим частные случаи $m = 1$ и $m = 2$.

1. Линейная аппроксимация ($m = 1$).

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x.$$

$$c_0 = \sum_{i=0}^n x_i^0 = n + 1; \quad c_1 = \sum_{i=0}^n x_i^1 = \sum_{i=0}^n x_i; \quad c_2 = \sum_{i=0}^n x_i^2; \quad (4.28)$$

$$b_0 = \sum_{i=0}^n y_i x_i^0 = \sum_{i=0}^n y_i; \quad b_1 = \sum_{i=0}^n y_i x_i^1 = \sum_{i=0}^n y_i x_i. \quad (4.29)$$

$$S = \sum_{i=0}^n (y_i - P_m(x_i))^2$$

Условия минимума S можно записать, приравняв нулю частные производные S по всем переменным $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$. Получим систему уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = - \sum_{i=0}^n 2(y_i - a_0 - a_1 x_i - \dots - a_m x_i^m) x_i^k = 0, \text{ или}$$

$$\sum_{i=0}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i - \dots - a_m x_i^m) x_i^k = 0, \quad (4.22)$$

$$k = 0, 1, \dots, m.$$

Систему уравнений (4.22) перепишем в следующем виде:

$$a_0 \sum_{i=0}^n x_i^k + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{k+1} + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^{k+m} = \sum_{i=0}^n y_i x_i^k, \quad (4.23)$$

$$k = 0, 1, \dots, m$$

Введем обозначения:

$$c_k = \sum_{i=0}^n x_i^k, \quad b_k = \sum_{i=0}^n y_i x_i^k.$$

Система (4.23) может быть записана так:

$$a_0 c_k + a_1 c_{k+1} + \dots + a_m c_{k+m} = b_k, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (4.24)$$

Перепишем систему (4.24) в развернутом виде:

$$\begin{cases} c_0 a_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_m a_m = b_0 \\ c_1 a_0 + c_2 a_1 + c_3 a_2 + \dots + c_{m+1} a_m = b_1 \\ \dots \end{cases} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(0) &= 0; \\ f^{(2k+1)}(\xi) &= (-1)^k \cos \xi. \end{aligned}$$

Следовательно, многочлен Тейлора для функции $y = \sin x$ для $n = 2k$ имеет вид:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k}(x),$$

$$R_{2k}(x) = (-1)^k \frac{\cos \xi}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Зададим $\varepsilon = 10^{-4}$ и отрезок $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Определим $n = 2k$ из неравенства:

$$|R_{2k}(x)| = \frac{|\cos \xi|}{(2k+1)!} |x|^{2k+1} < \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+1} < \frac{0.8}{(2k+1)!} < \varepsilon = 10^{-4}.$$

Таким образом, на отрезке $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ функция $y = \sin x$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$ равна многочлену 5-ой степени:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = x - 0.1667x^3 + 0.0083x^5.$$

Пример 4.2.

Найдем приближение функции $y = e^x$ многочленом Тейлора на отрезке $[0, 1]$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

Выберем $a = 1/2$, т.е. в середине отрезка. При этом величина погрешности в левой части (4.2) принимает минимальное значение. Из математиче-

ского анализа известно, что для k -ой производной от e^x справедливо равенство:

$$(e^x)^{(k)} = e^x.$$

Поэтому

$$(e^a)^{(k)} = e^a = e^{1/2},$$

Следовательно, многочлен Тейлора для функции $y = e^x$ имеет вид:

$$e^x = e^{1/2} + e^{1/2}(x - 1/2) + \frac{e^{1/2}}{2!}(x - 1/2)^2 + \dots + \frac{e^{1/2}}{n!}(x - 1/2)^n + R_n(x),$$

При этом, учитывая, что $x \in [0, 1]$, получим оценку погрешности:

$$|R_n(x)| < \frac{e}{2^{n+1}(n+1)!}. \quad (4.4)$$

Составим таблицу погрешностей, вычисленных по формуле (4.4):

n	2	3	4	5	6
R_n	0.057	0.0071	0.00071	0.000059	0.0000043

Таким образом, следует взять $n = 6$.

4.3. Интерполяция функции многочленами Лагранжа

Рассмотрим другой подход к приближению функции многочленами. Пусть функция $y = f(x)$

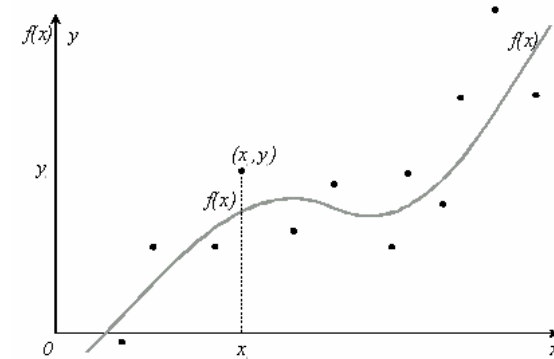


Рис.4.2.

Эта функциональная зависимость должна с достаточной точностью соответствовать исходной табличной зависимости. В качестве критерия точности чаще всего используют критерий *наименьших квадратов*, т.е. определяют такую функциональную зависимость $f(x)$, при которой

$$S = \sum_{i=0}^n (y_i - f_i)^2, \quad (4.19)$$

обращается в минимум.

Погрешность приближения оценивается величиной среднеквадратического отклонения

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{n+1}} S. \quad (4.20)$$

В качестве функциональной зависимости рассмотрим многочлен

$$P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m. \quad (4.21)$$

Формула (4.12) примет вид

Подставляя (4.17) в (4.16) и переходя к переменной $t = \frac{x - x_n}{h}$, получим окончательный вид второй интерполяционной формулы Ньютона:

$$P_n(x) = P_n(x_n + th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t+1) \dots t(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (4.18)$$

4.5. Аппроксимация функций. Метод наименьших квадратов

В инженерной деятельности часто возникает необходимость описать в виде функциональной зависимости связь между величинами, заданными таблично или в виде набора точек с координатами (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, где n – общее количество точек. Как правило, эти табличные данные получены экспериментально и имеют погрешности (рис. 2.5).

При аппроксимации желательно получить относительно простую функциональную зависимость (например, многочлен), которая позволила бы «сгладить» экспериментальные погрешности, вычислять значения функции в точках, не содержащихся в исходной таблице.

определена на отрезке $[a, b]$ и известны значения этой функции в некоторой системе узлов

$$x_i \in [a, b], i = 0, 1, \dots, n.$$

Например, эти значения получены в эксперименте при наблюдении некоторой величины в определенных точках или в определенные моменты времени x_0, x_1, \dots, x_n . Обозначим эти значения следующим образом:

$$y_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n.$$

Требуется найти такой многочлен $P(x)$ степени m

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m, \quad (4.5)$$

который бы в узлах x_i , $i = 0, 1, \dots, n$ принимал те же значения, что и исходная функция $y = f(x)$, т. е.

$$P(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n. \quad (4.6)$$

Многочлен (4.5), удовлетворяющий условию (4.6), называется *интерполяционным многочленом*.

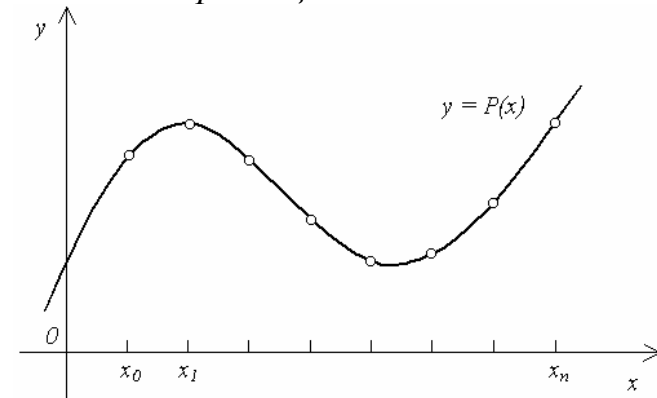


Рис. 4.1.

Другими словами, ставится задача построения функции $y = P(x)$, график которой проходит через заданные точки (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$ (рис. 4.1).

Объединяя (4.5) и (4.6), получим:

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (4.7)$$

В искомом многочлене $P(x)$ неизвестными являются $m + 1$ коэффициент $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$. Поэтому систему (4.7) можно рассматривать как систему из $n + 1$ уравнений с $m + 1$ неизвестными. Известно, что для существования единственного решения такой системы необходимо, чтобы выполнялось условие: $m = n$. Таким образом, систему (4.7) можно переписать в развернутом виде:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_2^n = y_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \quad (4.8)$$

Вопрос о существовании и единственности интерполяционного многочлена решает следующая теорема:

Теорема 4.1. Существует единственный интерполяционный многочлен степени n , удовлетворяющий условиям (4.6).

$$P_n(x) = P_n(x_0 + th) = y_0 + t \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1) \dots t(t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (4.15)$$

Формула (4.15) называется первой интерполяционной формулой Ньютона. Эта формула применяется для интерполирования в начале отрезка интерполяции, когда t мало по абсолютной величине. Первую интерполяционную формулу Ньютона называют по этой причине формулой для интерполирования вперед. За начальное значение x_0 можно принимать любое табличное значение аргумента x .

Когда значение аргумента находится ближе к концу отрезка интерполяции, применять первую интерполяционную формулу становится невыгодно. В этом случае применяется формула для интерполирования назад – вторая интерполяционная формула Ньютона, которая отыскивается в виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + a_n(x - x_n) \dots (x - x_1). \quad (4.16)$$

Как и для первой формулы Ньютона, коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n находятся из условия совпадения значений функции и интерполяционного многочлена в узлах:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k! h^k}; \quad (4.17)$$

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3};$$

В общем случае выражение для a_k будет иметь вид:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}; \quad (4.14)$$

Подставим теперь (4.14) в выражение для многочлена (4.13):

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}).$$

Практически эта формула применяется в несколько ином виде. Положим $\frac{x - x_0}{h} = t$, то есть $x = x_0 + ht$. Тогда:

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = t - 1,$$

$$\frac{x - x_2}{h} = \frac{x - x_0 - 2h}{h} = t - 2$$

и так далее. Окончательно имеем:

Имеются различные формы записи интерполяционного многочлена. Широко распространенной формой записи является многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^n y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \sum_{i=1}^n y_i \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}. \quad (4.9)$$

В частности, для линейной и квадратичной интерполяции по Лагранжу получим следующие интерполяционные многочлены:

$$L_1(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)},$$

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Пример 4.3.

Построим интерполяционный многочлен Лагранжа по следующим данным:

x	0	2	3	5
y	1	3	2	5

Степень многочлена Лагранжа для $n + 1$ узла равна n . Для нашего примера многочлен Лагранжа имеет третью степень. В соответствии с (4.9)

$$\begin{aligned}
L_3(x) &= 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)} + 3 \cdot \frac{x(x-3)(x-5)}{2(2-3)(2-5)} + \\
&+ 2 \cdot \frac{x(x-2)(x-5)}{3(3-2)(3-5)} + 5 \cdot \frac{x(x-2)(x-3)}{5(5-2)(5-3)} = \\
&= 1 + \frac{62}{15}x - \frac{13}{6}x^2 + \frac{3}{10}x^3.
\end{aligned}$$

Пример 4.4.

Рассмотрим пример использования интерполяционного многочлена Лагранжа для вычисления значения заданной функции в промежуточной точке. Эта задача возникает, например, когда заданы табличные значения функции с крупным шагом, а требуется составить таблицу значений с маленьким шагом.

Для функции $y = \sin x$ известны следующие данные.

x	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$
y	0	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Вычислим y (0.25).

Найдем многочлен Лагранжа третьей степени:

$$L_3(x) = 0 \cdot \frac{(x - \pi/6)(x - \pi/3)(x - \pi/2)}{(0 - \pi/6)(0 - \pi/3)(0 - \pi/2)} +$$

Пусть для функции, заданной таблицей с постоянным шагом, составлена таблица конечных разностей 4.2. Будем искать интерполяционный многочлен в виде:

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\
&+ a_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Это многочлен n -й степени. Значения коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n найдем из условия совпадения значений исходной функции и многочлена в узлах. Полагая $x = x_0$, из (4.13) находим $y_0 = P_n(x_0) = a_0$, откуда $a_0 = y_0$. Далее, придавая x значения x_1 и x_2 , последовательно получаем:

$$y_1 = P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$$

откуда

$$a_1 = \frac{\Delta y_0}{h};$$

$$y_2 = P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$

то есть

$$y_2 - \Delta^2 y_0 - y_0 = 2h^2 a_2, \text{ или } y_2 - 2y_1 + y_0 = 2h^2 a_2,$$

откуда

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2};$$

Далее, проведя аналогичные выкладки, можно получить

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

Продолжая этот процесс, можно по заданной таблице функции составить таблицу конечных разностей (см. таблицу 4.2). Конечные разности любого порядка могут быть представлены через значения функции. Действительно, для разностей первого порядка это следует из определения. Для разностей второго порядка имеем:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i.$$

Аналогично для разностей третьего порядка:

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_i &= \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = (y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1}) - (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) = \\ &= y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i \end{aligned}$$

и так далее.

Методом математической индукции можно доказать, что

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - k \cdot y_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} \cdot y_{i+k-2} - \dots + (-1)^k \cdot y_i. \quad (4.12)$$

Таблица 4.2.

x	y	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$...
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$...	
x_3	y_3	Δy_3	...		
x_4	y_4	...			
...	...				

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-0)(x-\pi/3)(x-\pi/2)}{(\pi/6-0)(\pi/6-\pi/3)(\pi/6-\pi/2)} + \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{(x-0)(x-\pi/6)(x-\pi/2)}{(\pi/3-0)(\pi/3-\pi/6)(\pi/3-\pi/2)} + \\ &+ 1 \cdot \frac{(x-0)(x-\pi/6)(x-\pi/3)}{(\pi/2-0)(\pi/2-\pi/6)(\pi/2-\pi/3)}. \end{aligned}$$

При $x = 0.25$ получим $y(0.25) = \sin 0.25 \approx 0.249$.

Погрешность интерполяции. Пусть интерполяционный многочлен Лагранжа построен для известной функции $f(x)$. Необходимо выяснить, насколько этот многочлен близок к функции в точках отрезка $[a, b]$, отличных от узлов. Погрешность интерполяции равна $|f(x) - P_n(x)|$. Оценку погрешности можно получить на основании следующей теоремы.

Теорема 4.2. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема $n + 1$ раз на отрезке $[a, b]$, содержащем узлы интерполяции $x_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \dots, n$. Тогда для погрешности интерполяции в точке $x \in [a, b]$ справедлива оценка:

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|, \quad (4.10)$$

где $M_{n+1} = \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$,

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Для максимальной погрешности интерполяции на всем отрезке $[a, b]$ справедлива оценка:

$$\max_{[a,b]} |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} |\omega_n(x)| \quad (4.11)$$

Пример 4.5.

Оценим погрешность приближения функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x = 116$ и на всем отрезке $[a, b]$, где $a = 100$, $b = 144$, с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа $L_2(x)$ второй степени, построенного с узлами $x_0 = 100$, $x_2 = 144$.

Найдем первую, вторую и третью производные функции $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2},$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-5/2}.$$

$$M_3 = \max_{[a,b]} |f'''(x)| = \frac{3}{8} 100^{-5/2} = \frac{3}{8} 10^{-5}.$$

В соответствии с (4.9) получим оценку погрешности в точке $x = 116$:

$$\begin{aligned} |\sqrt{116} - L_2(116)| &\leq \frac{1}{3!} |(116 - 100)(116 - 121) \times \\ &\times (116 - 144)| = \frac{1}{16} 10^{-5} \cdot 16 \cdot 5 \cdot 28 = 1.4 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Оценим погрешность приближения функции $f(x) = \sqrt{x}$ на всем отрезке в соответствии с (4.11):

$$\begin{aligned} \max_{[a,b]} |\sqrt{x} - L_2(x)| &\leq \\ &\leq \frac{10^{-5}}{16} \max_{[a,b]} |(x - 100)(x - 121)(x - 144)| \approx 2.5 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

4.4. Интерполяционные многочлены Ньютона для равноотстоящих узлов

Часто интерполирование ведется для функций, заданных таблицами с равноотстоящими значениями аргумента. В этом случае шаг таблицы $h = x_{i+1} - x_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) является величиной постоянной. Для таких таблиц построение интерполяционных формул (как, впрочем, и вычисление по этим формулам) заметно упрощается.

Таблица 4.1.

x	x_0	x_1	\dots	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	\dots	y_n

Пусть функция задана таблицей вида (4.1) с постоянным шагом. Разности между значениями функции в соседних узлах интерполяции называются *конечными разностями первого порядка*:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

Из конечных разностей первого порядка образуются *конечные разности второго порядка*: